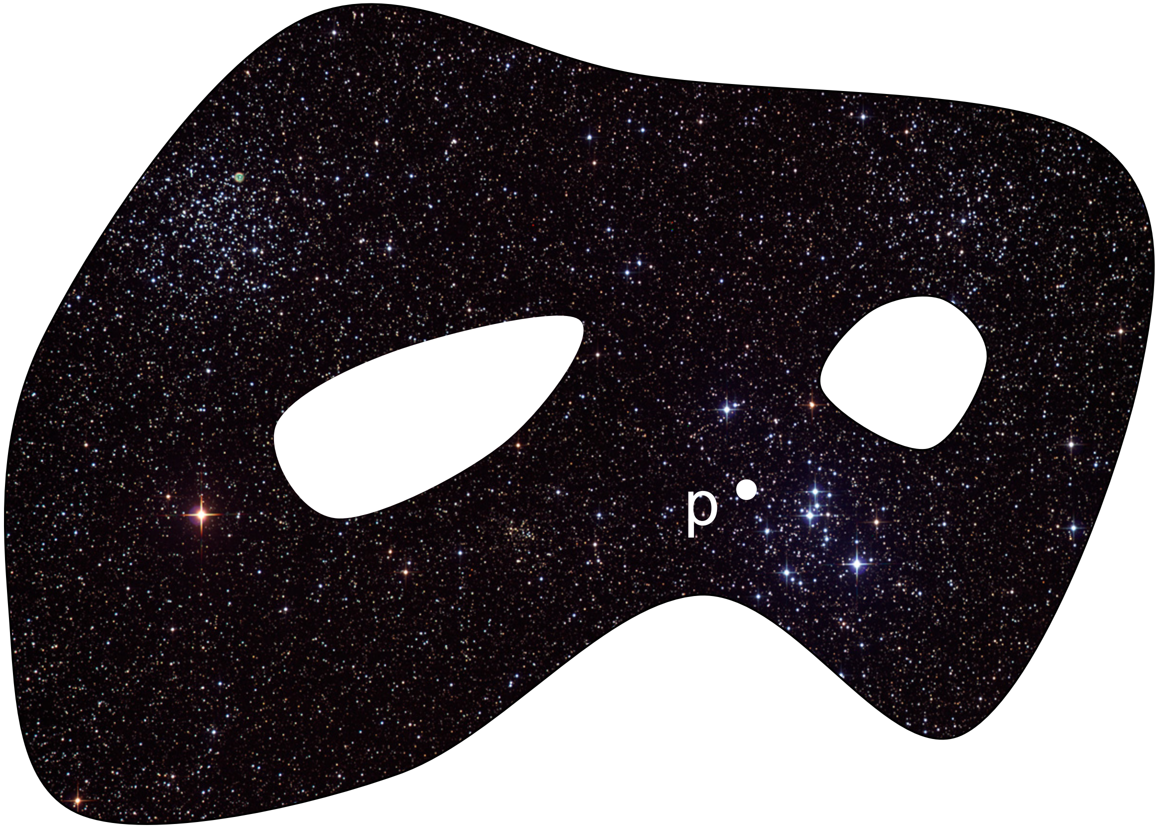
3-variedades

Max Neumann Coto
Instituto de Matemáticas UNAM
Cuernavaca

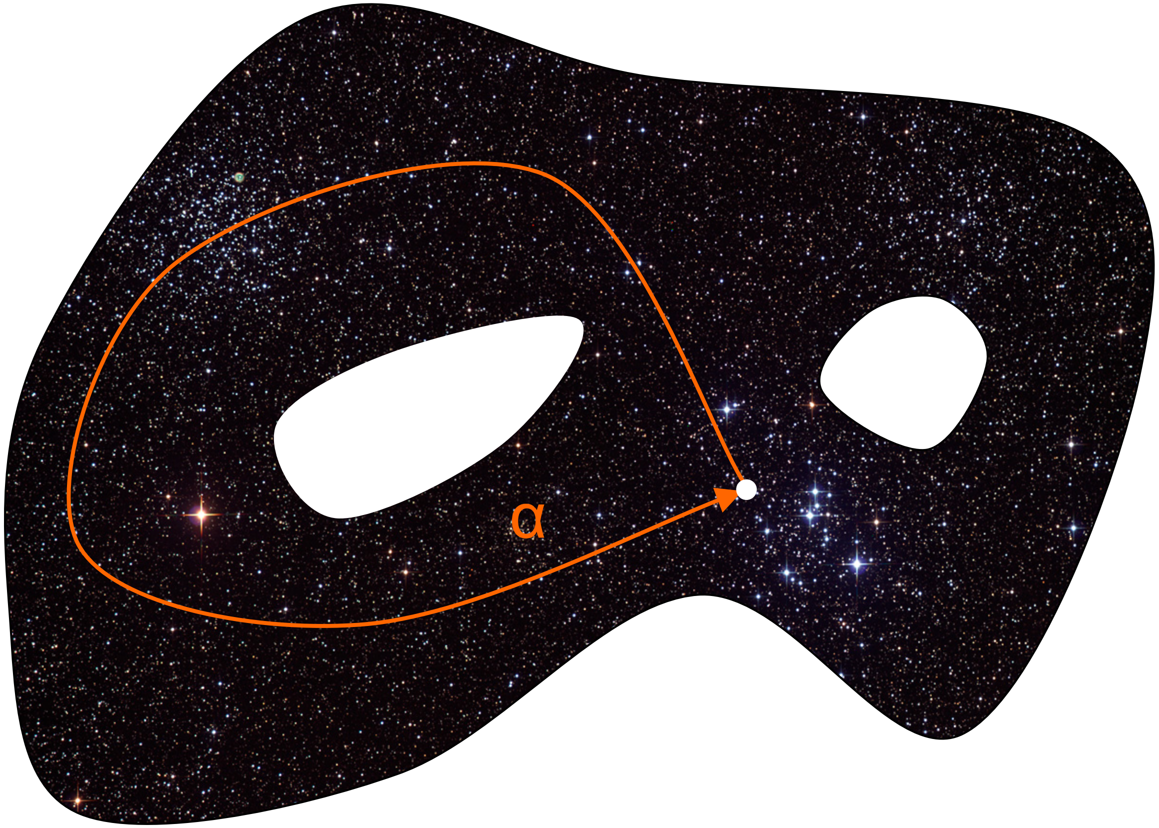
4. Grupo fundamental

Lazos



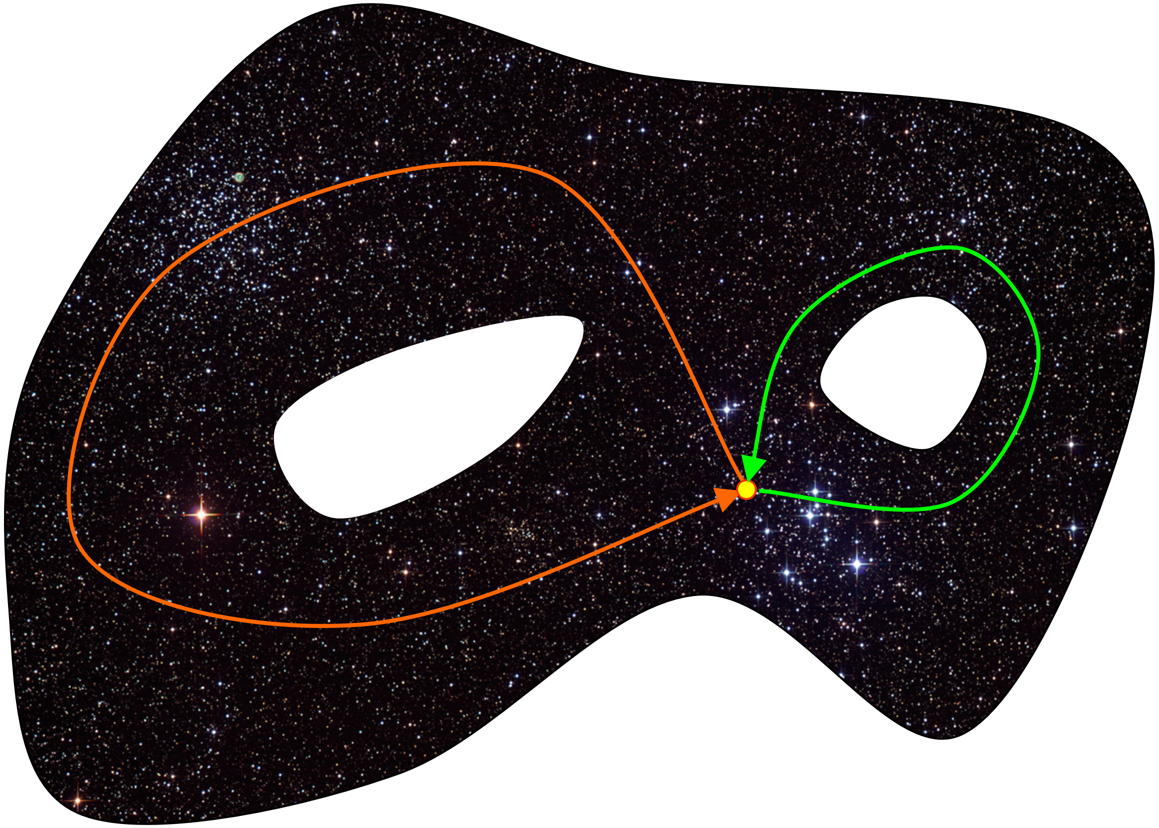
Elijamos un punto p en la variedad y consideremos todos los caminos que empiezan y terminan en p.

Lazos



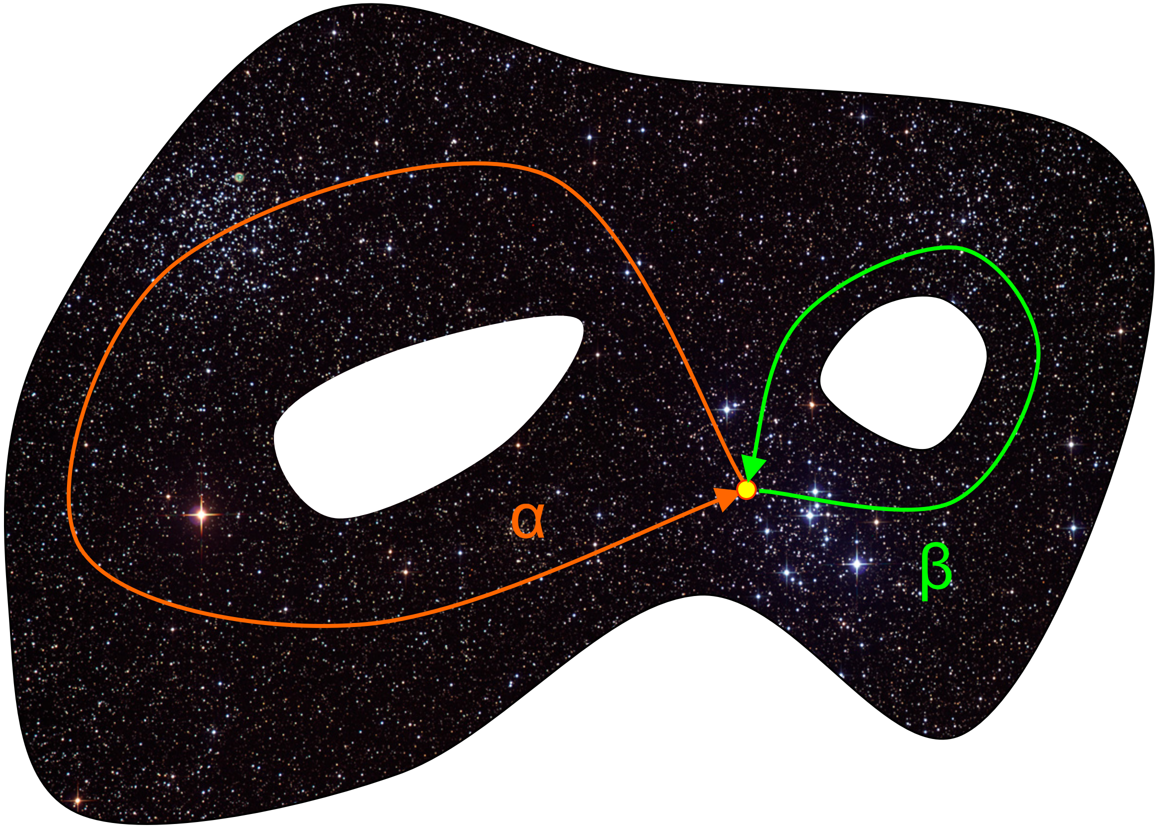
Estos caminos basados en p se llaman *lazos:* son funciones continuas $\alpha : [0,1] \rightarrow M$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = p$

Lazos



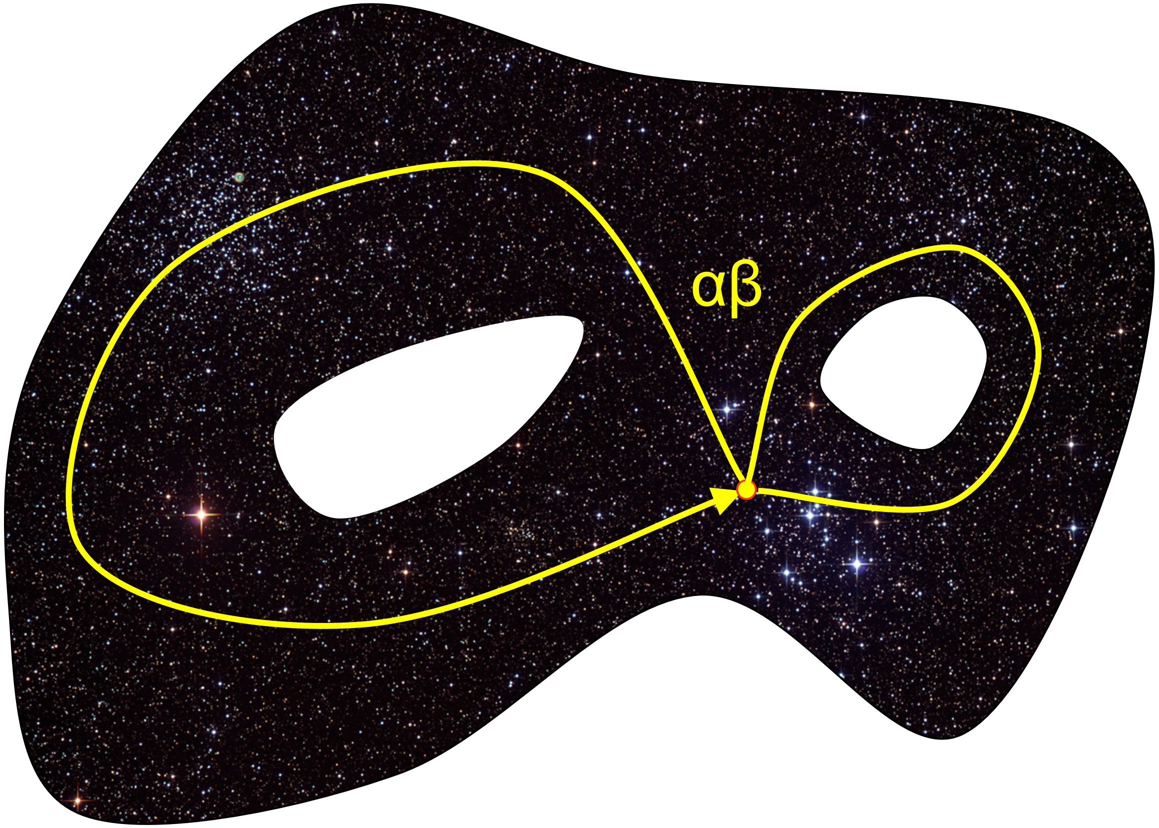
Estos caminos basados en p se llaman *lazos:* son funciones continuas $\alpha : [0,1] \to M$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = p$

Producto de lazos



Dos lazos α y β pueden combinarse recorriendo primero α y después β para obtener otro lazo llamado αβ

Producto de lazos

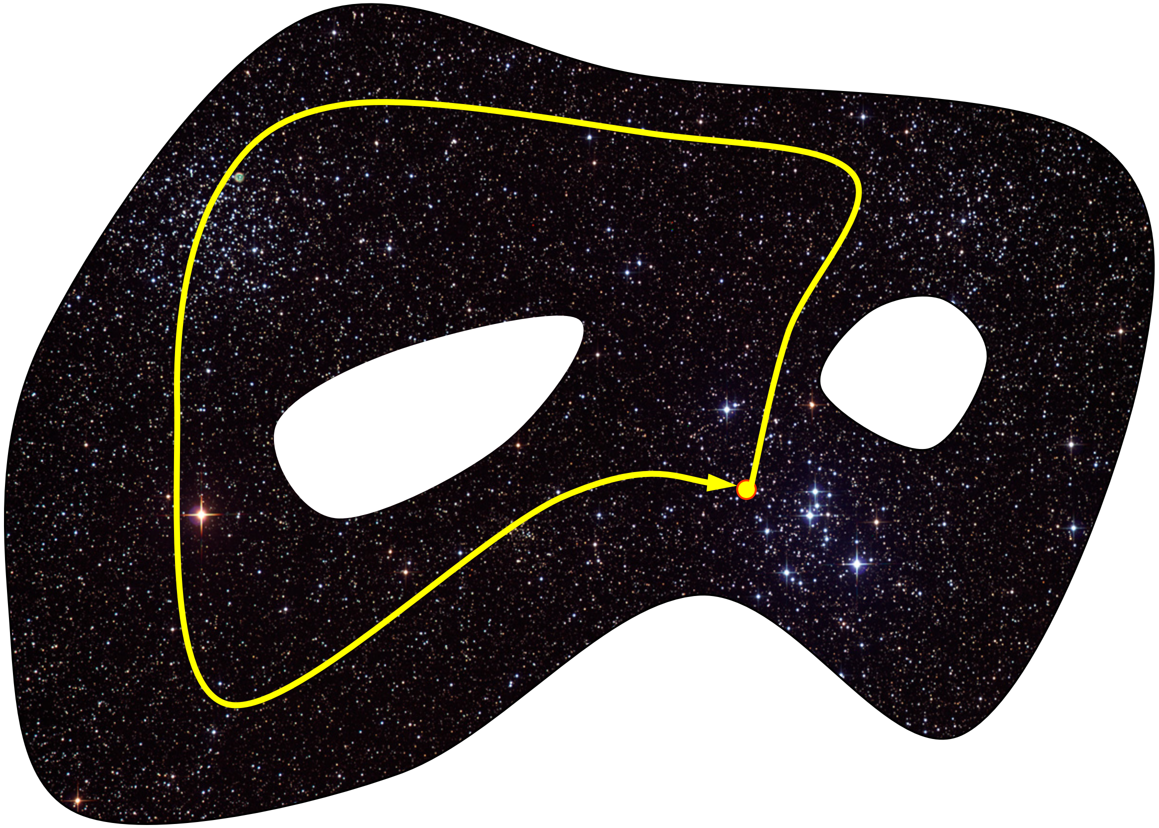


Dos lazos α y β pueden combinarse recorriendo primero α y después β para obtener otro lazo llamado αβ

Lazos homotópicos

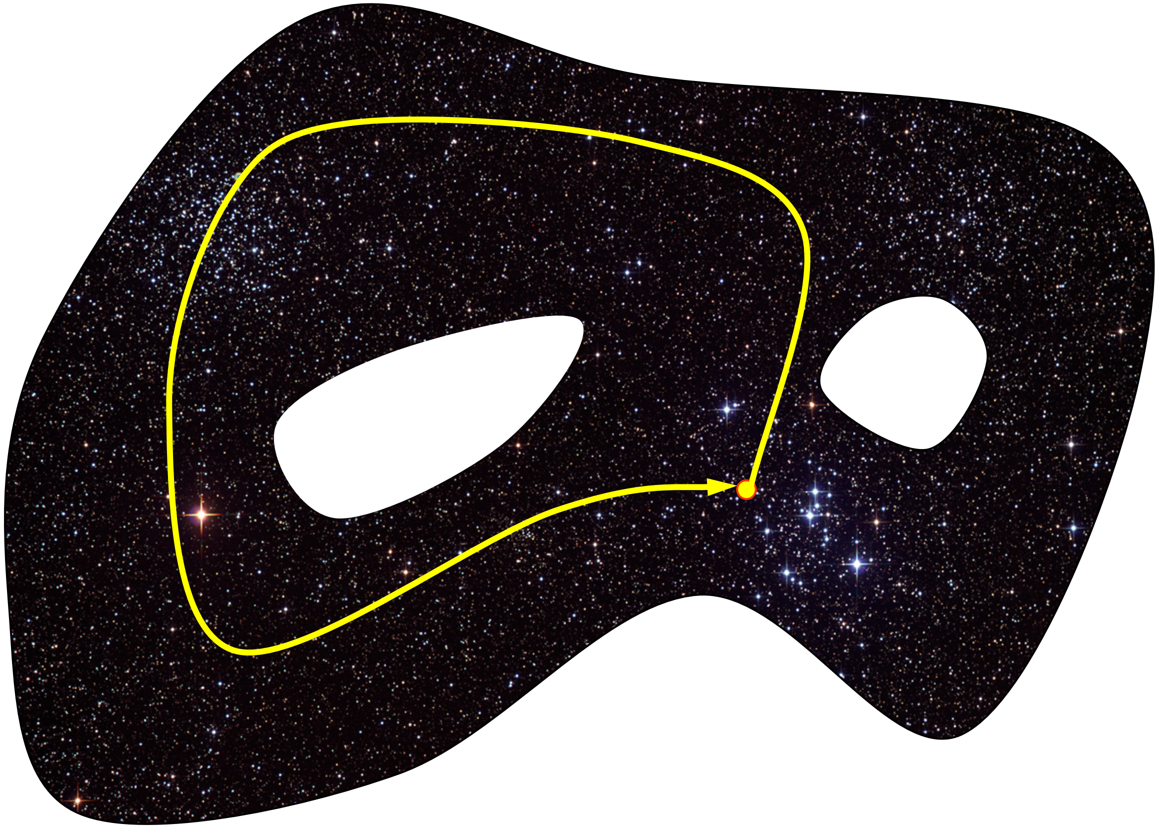
Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



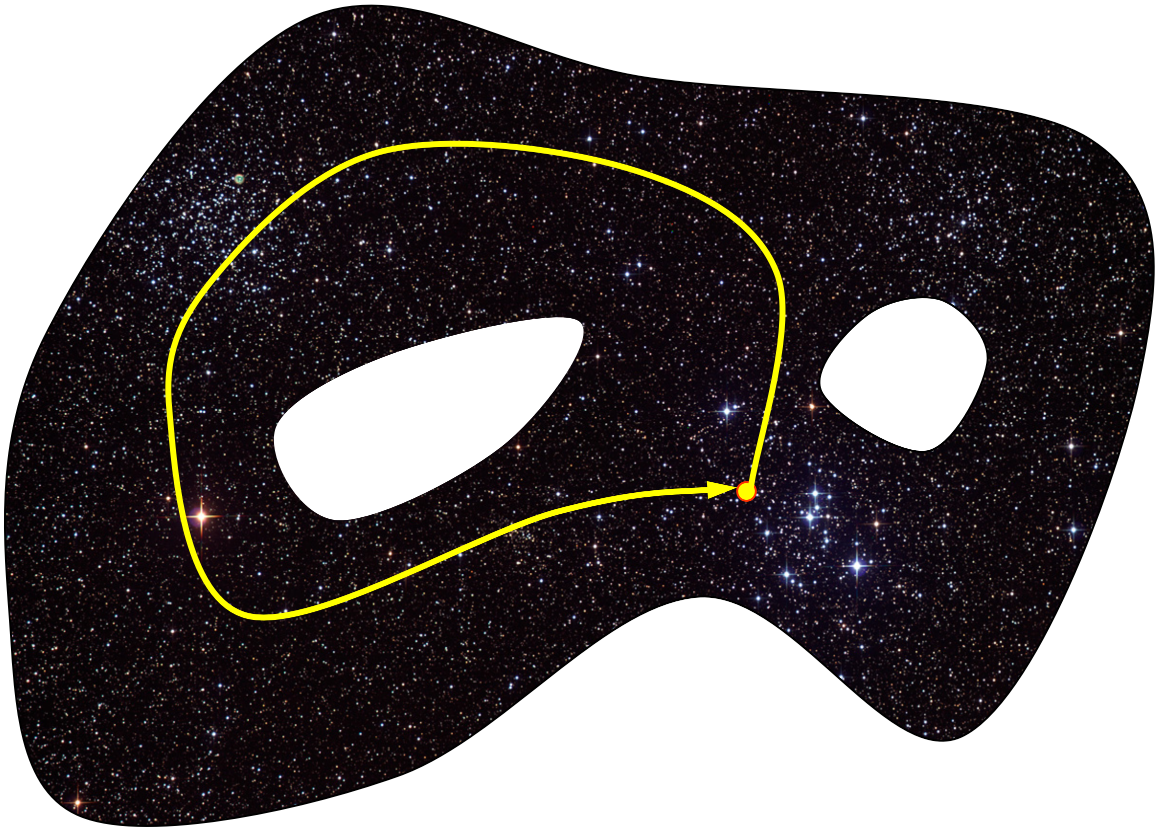
Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



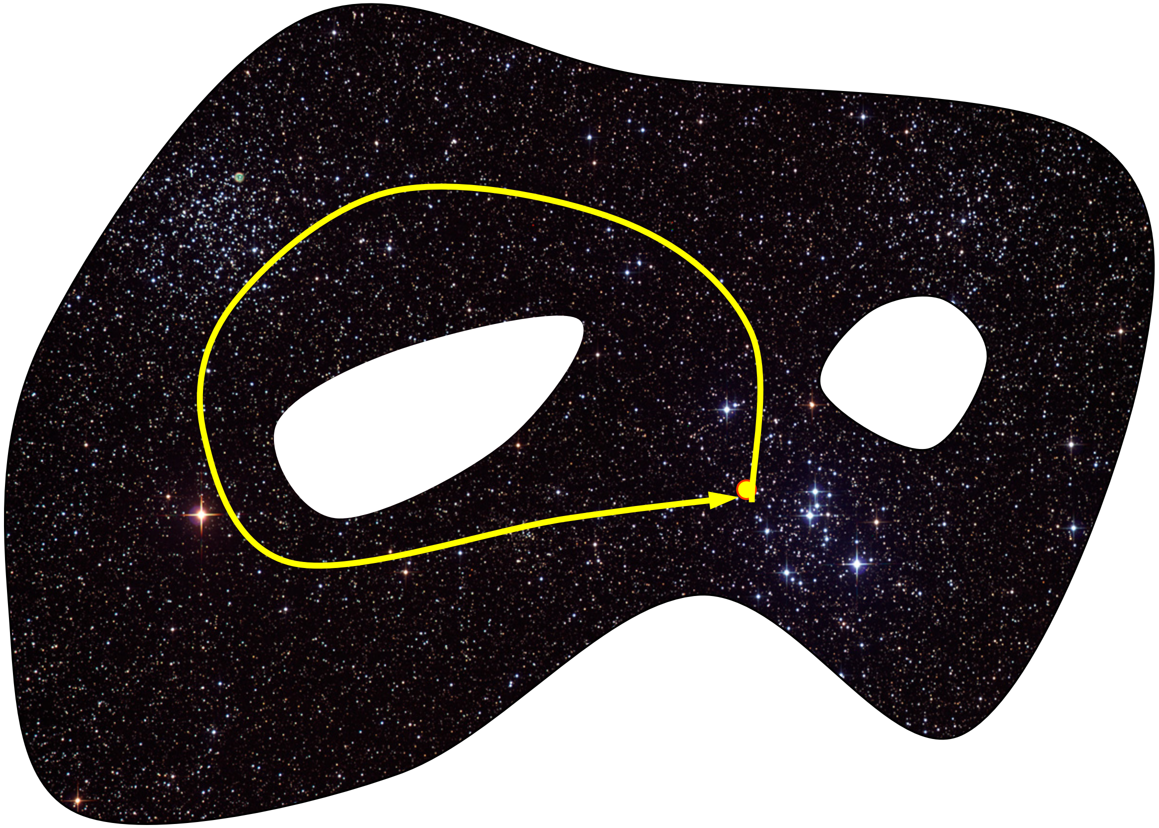
Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



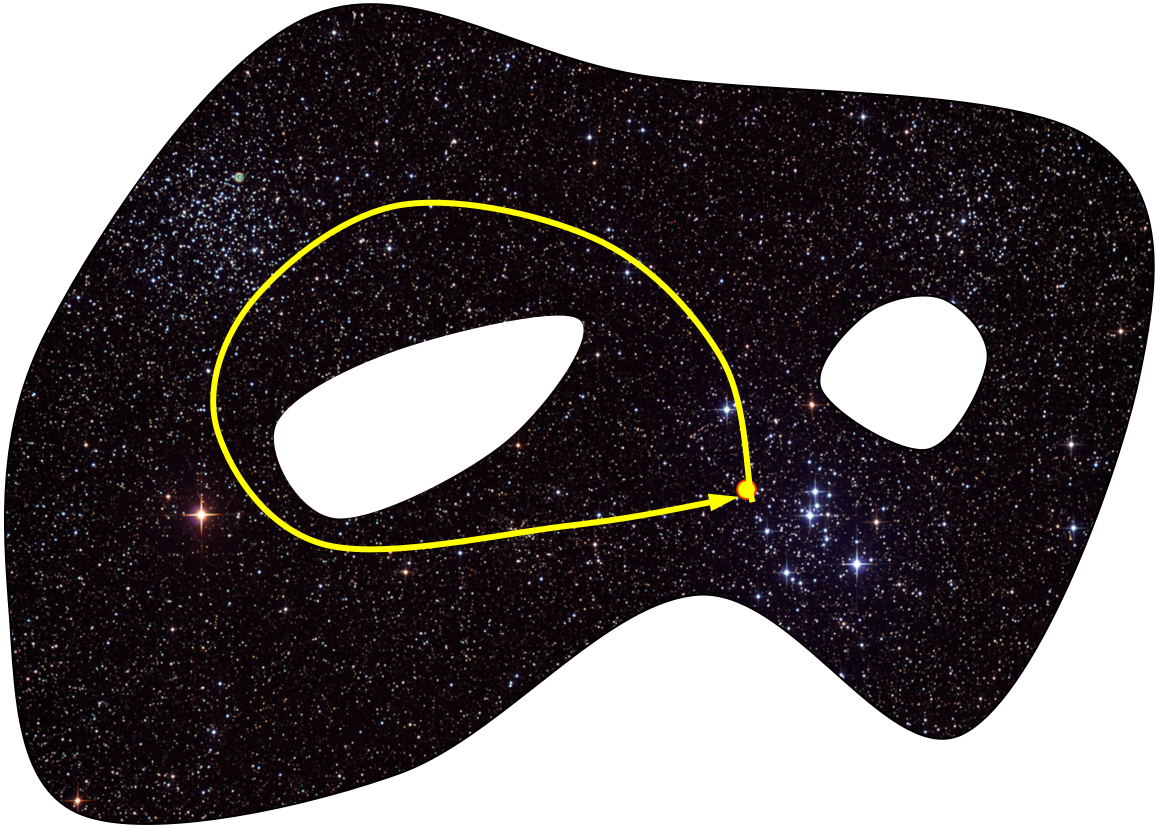
Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



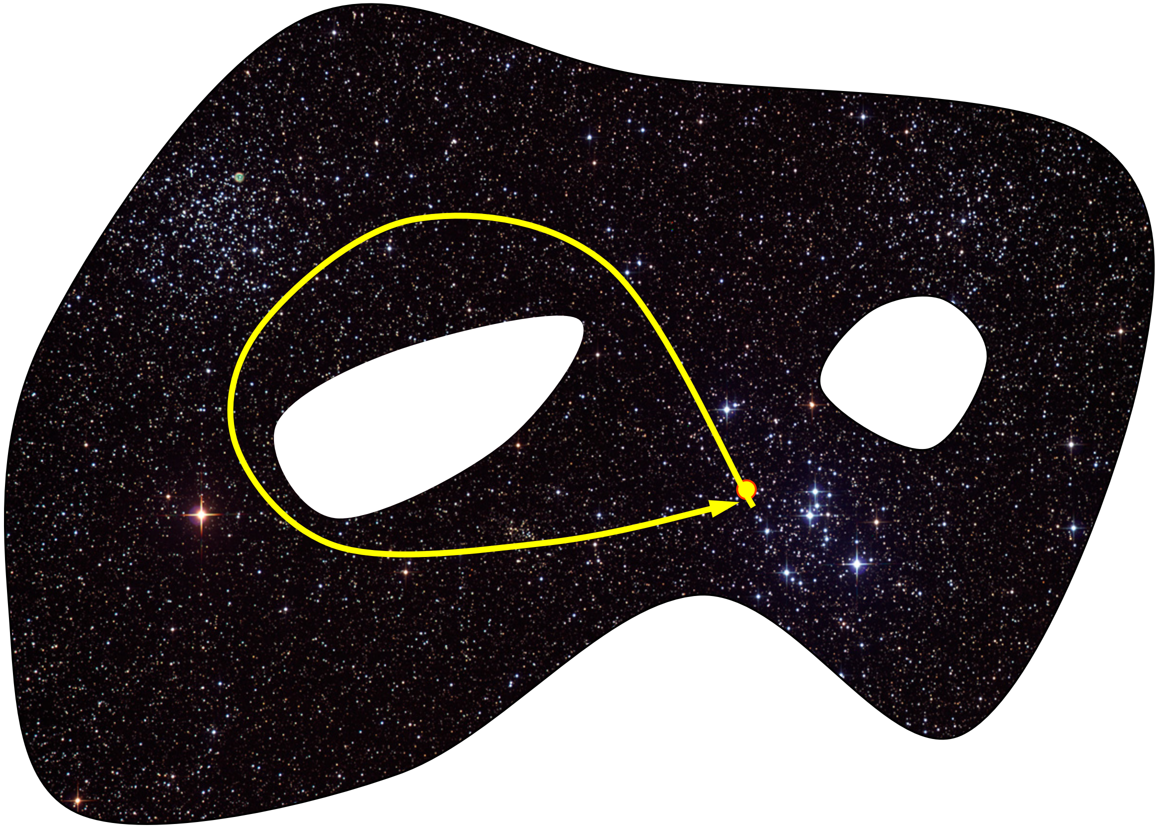
Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



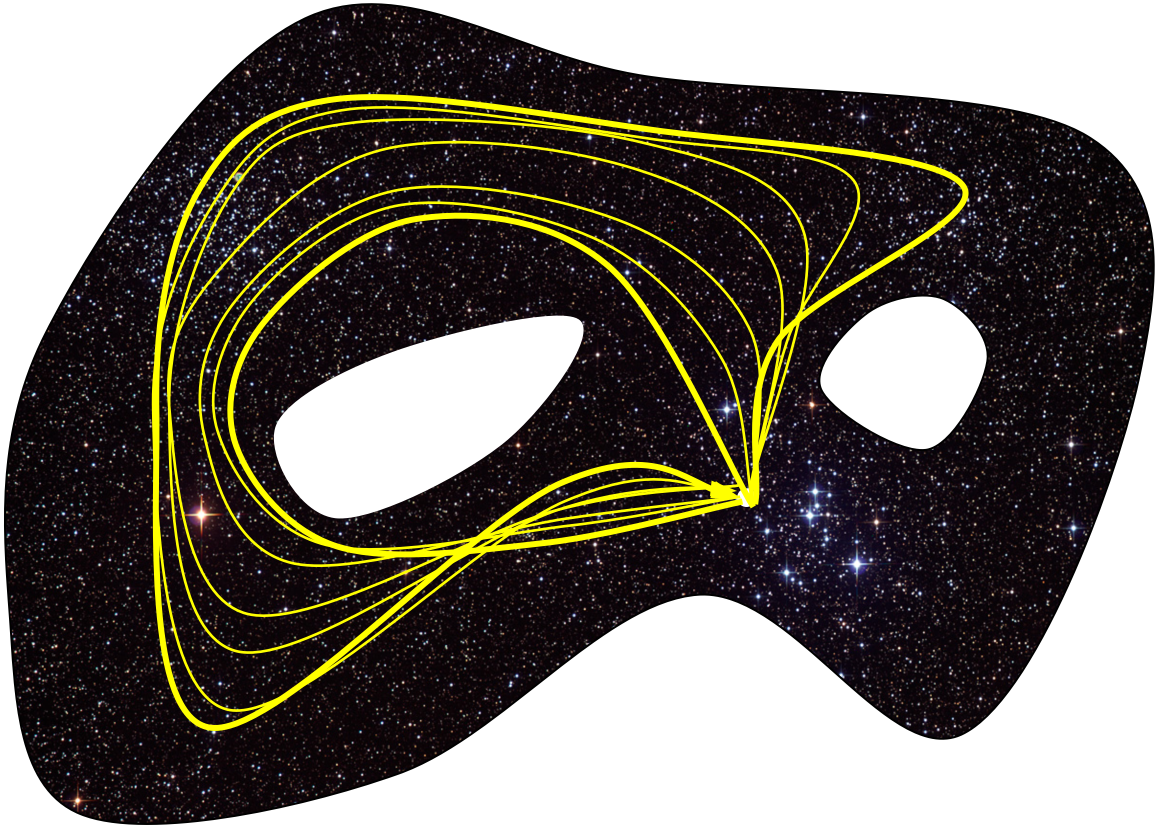
Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazos homotópicos



Dos lazos α_0 a α_1 son *homotópicos* si existe una familia continua de lazos α_t que transforman α_0 a α_1

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

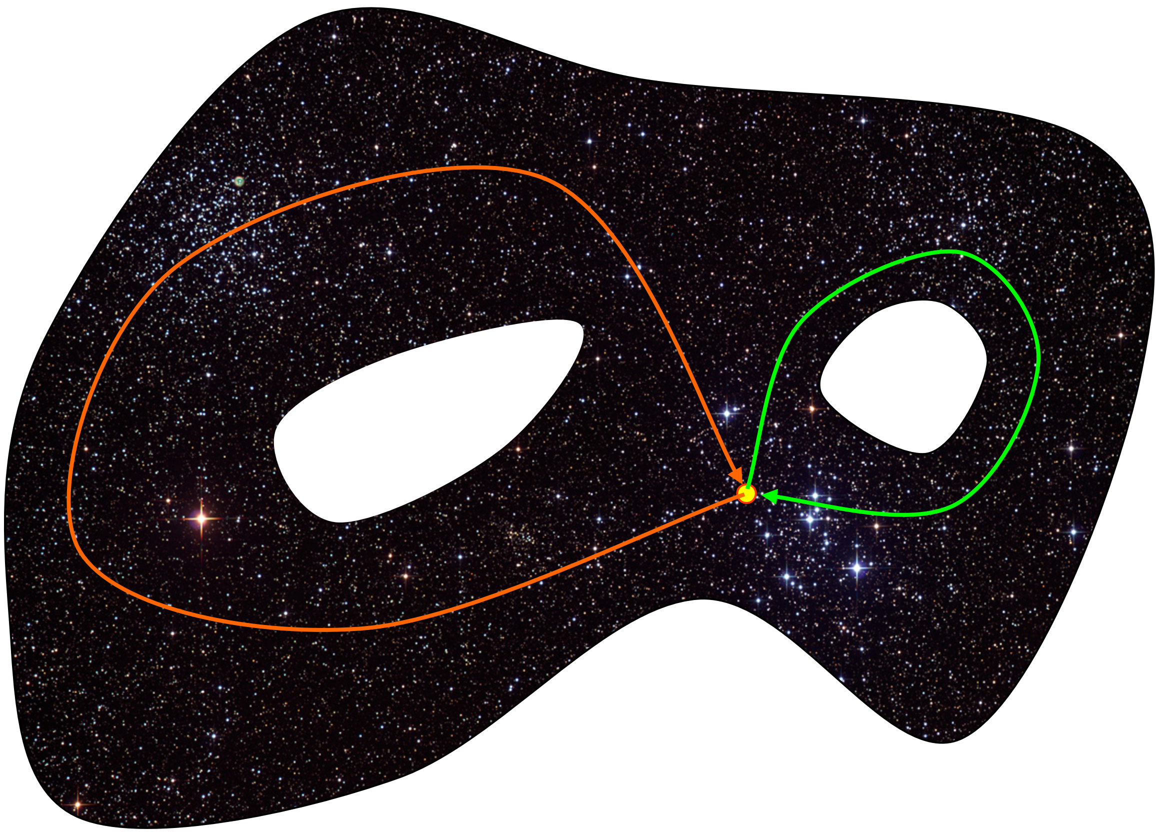
Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

Lazo homotópico a 0

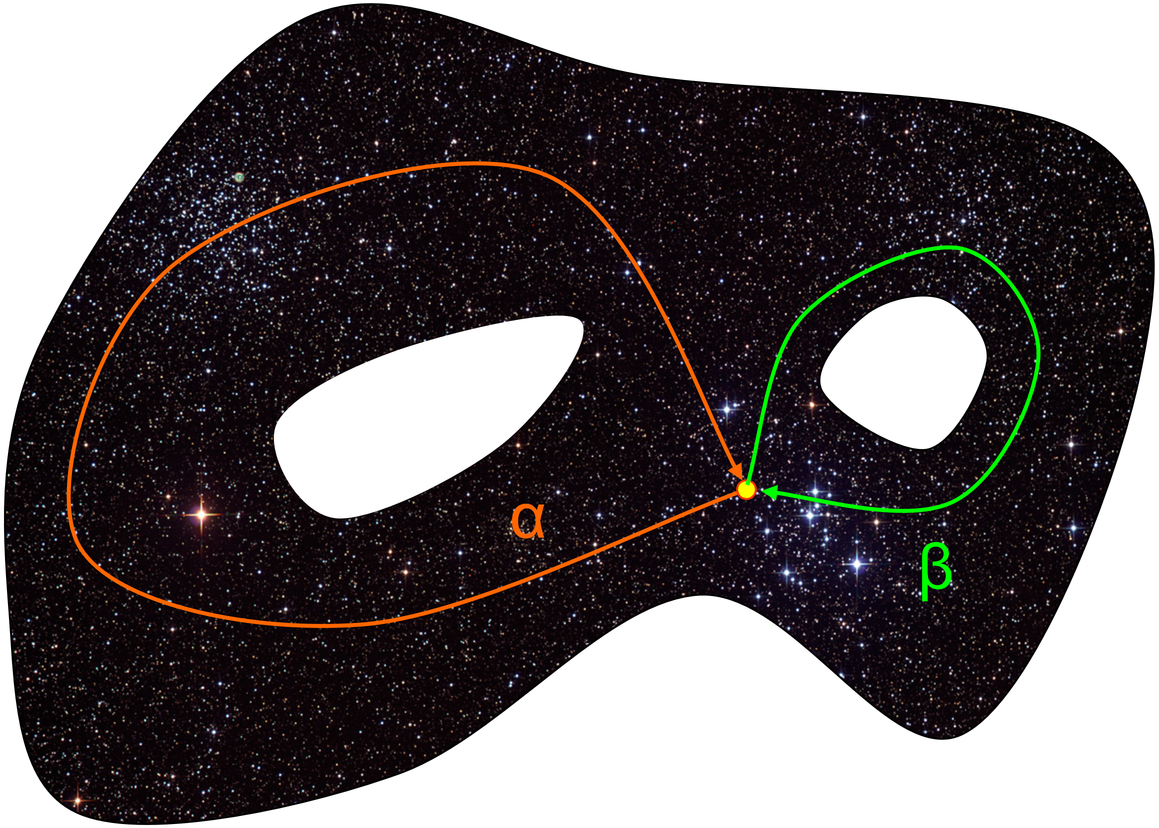
Lazo homotópico a 0

Clases de homotopía



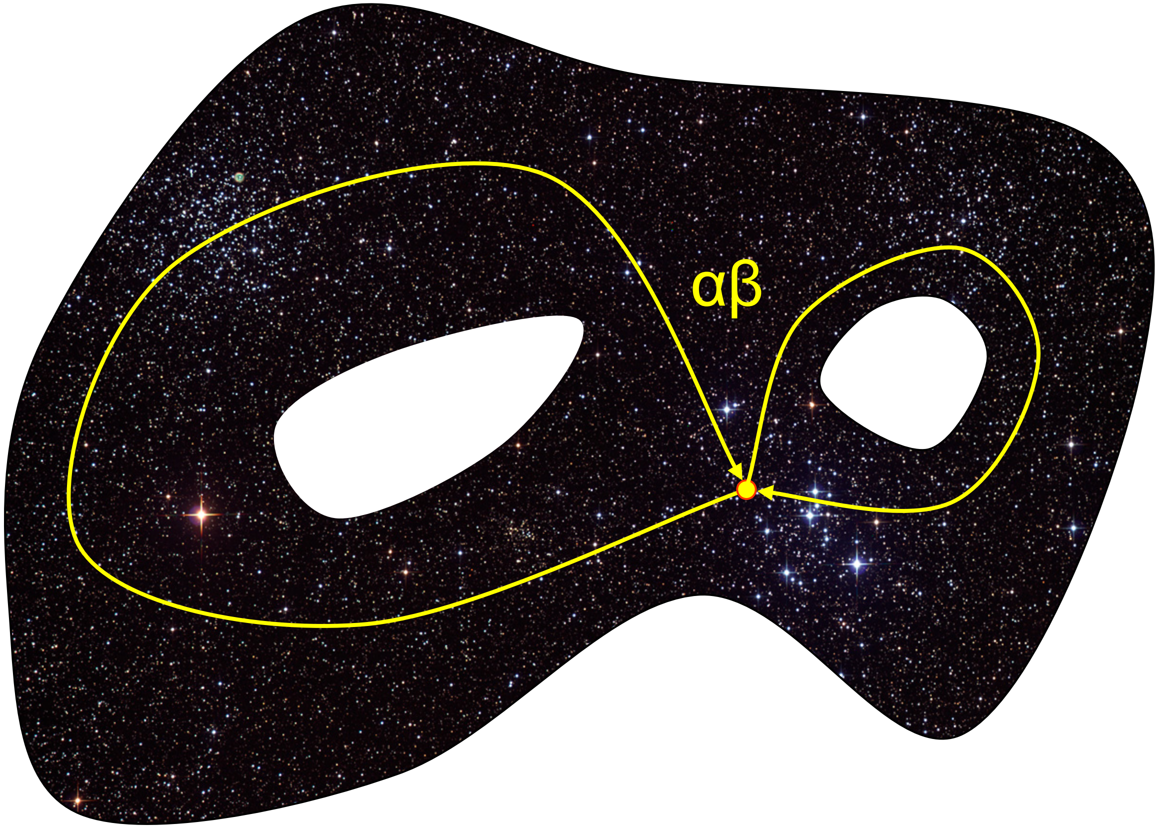
La homotopía da una relación de equivalencia entre lazos, las clases de equivalencia se llaman *clases de homotopía*.

Producto de clases de homotopía



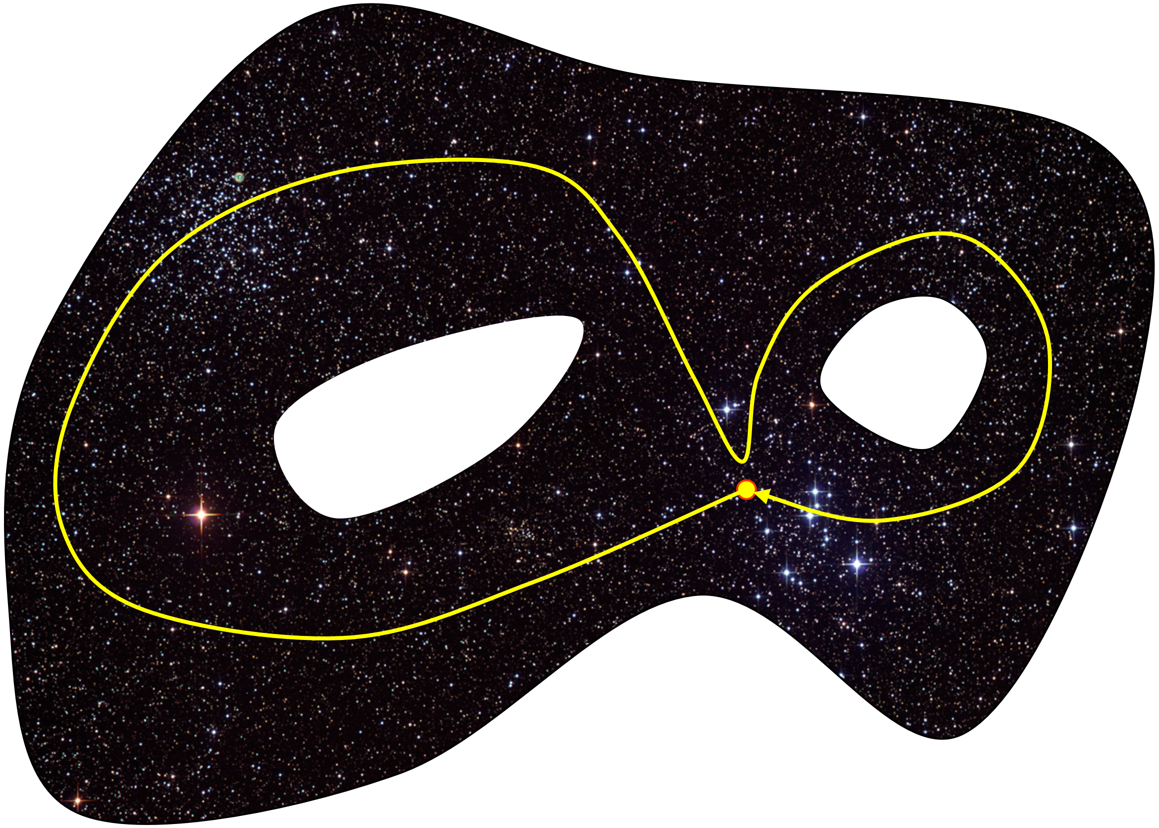
Se define el *producto* de las clases de homotopía [α] y [β] como la clase de homotopía [αβ]

Producto de clases de homotopía



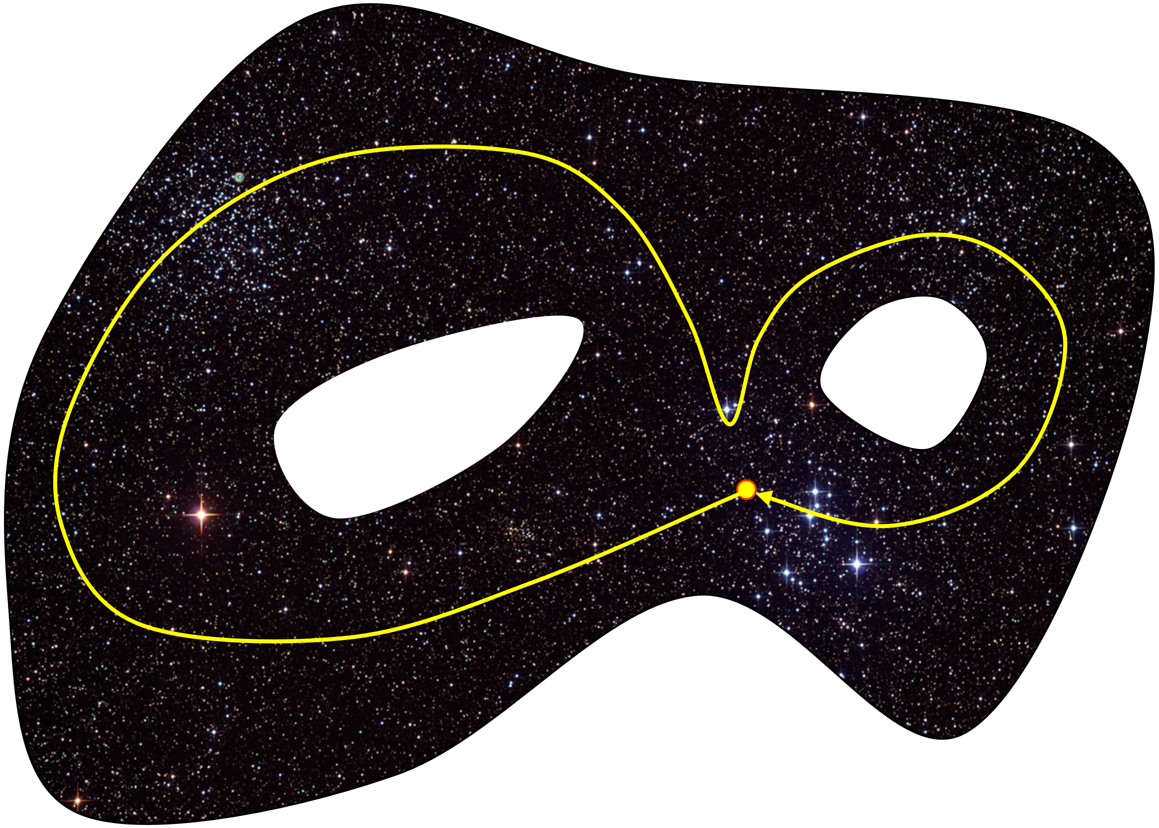
Se define el *producto* de las clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ como la clase de homotopía $[\alpha\beta]$

Producto de clases de homotopía



Se define el *producto* de las clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ como la clase de homotopía $[\alpha\beta]$

Producto de clases de homotopía



Se define el *producto* de las clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ como la clase de homotopía $[\alpha\beta]$

Producto de clases de homotopía

Se define el *producto* de las clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ como la clase de homotopía $[\alpha\beta]$

Producto de clases de homotopía

Se define el *producto* de las clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ como la clase de homotopía $[\alpha\beta]$

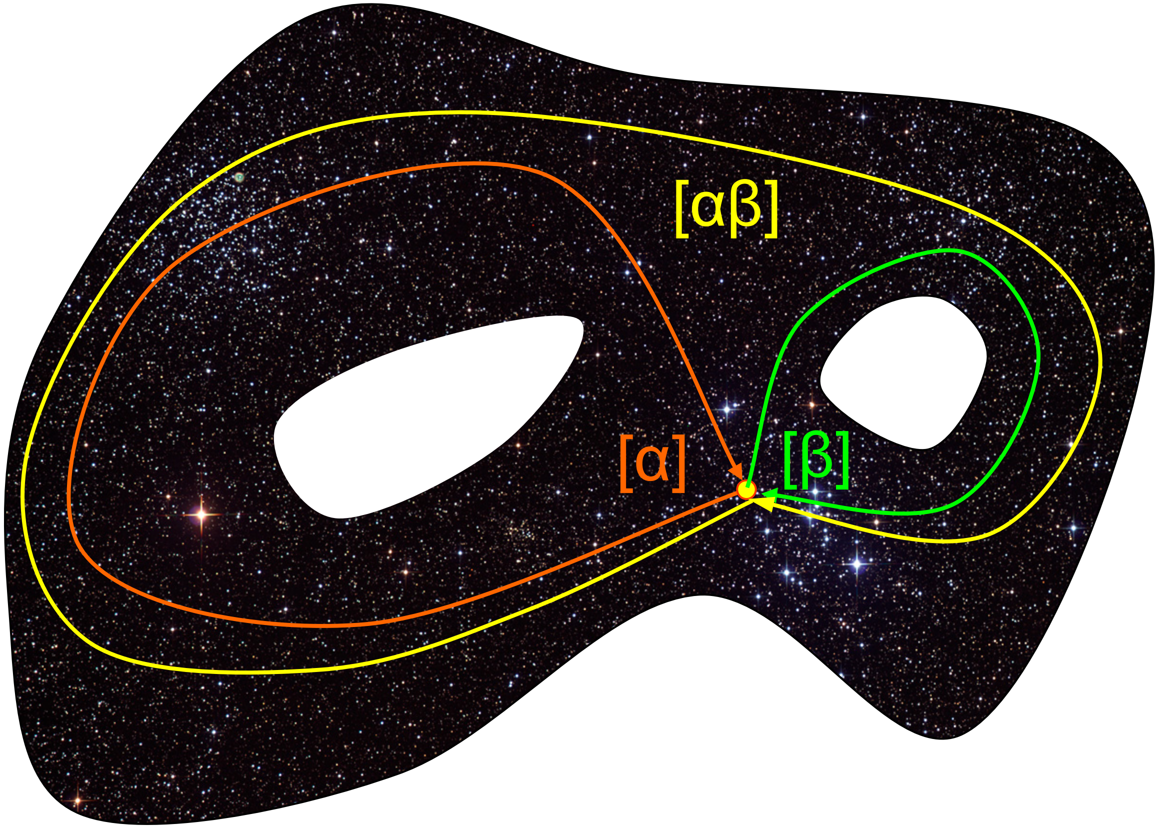
Producto de clases de homotopía

Se define el *producto* de las clases de homotopía [α] y [β] como la clase de homotopía [αβ]

Producto de clases de homotopía

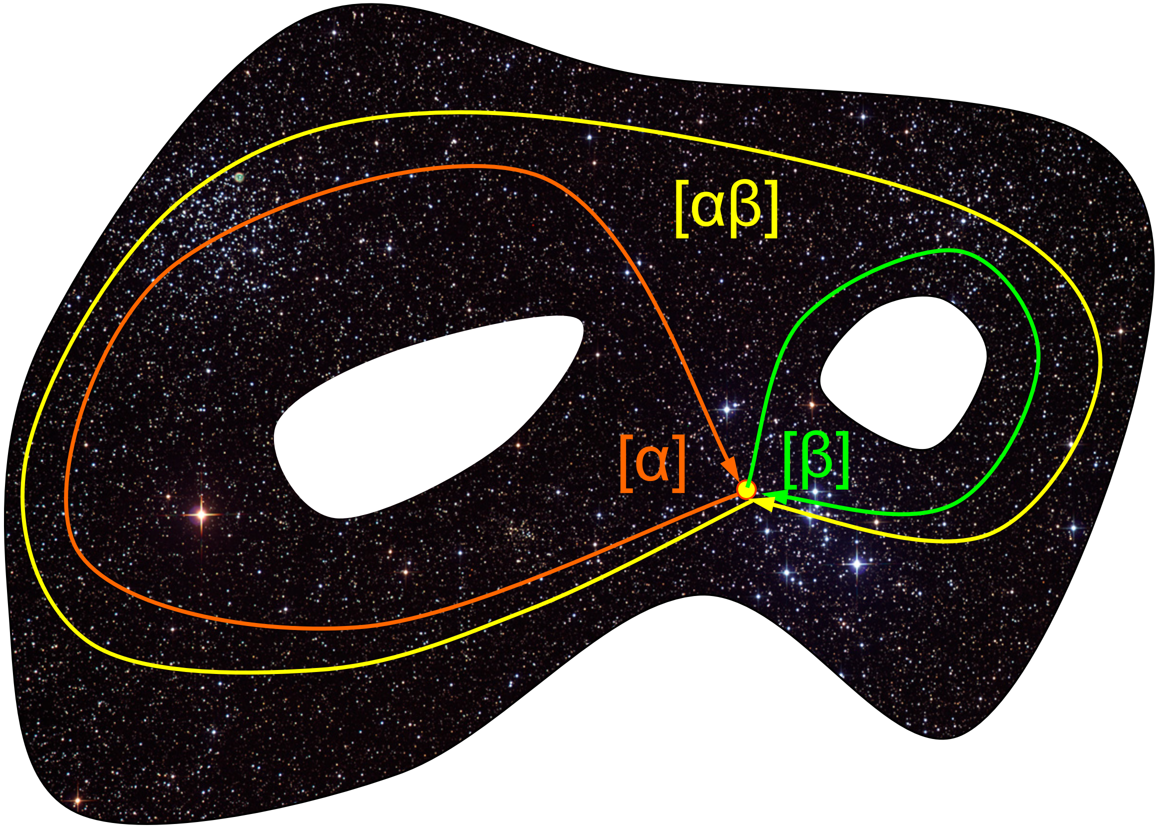
Se define el *producto* de las clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ como la clase de homotopía $[\alpha\beta]$

Producto de clases de homotopía



El *producto* de las clases de homotopía [α] y [β] es la clase de homotopía [αβ]

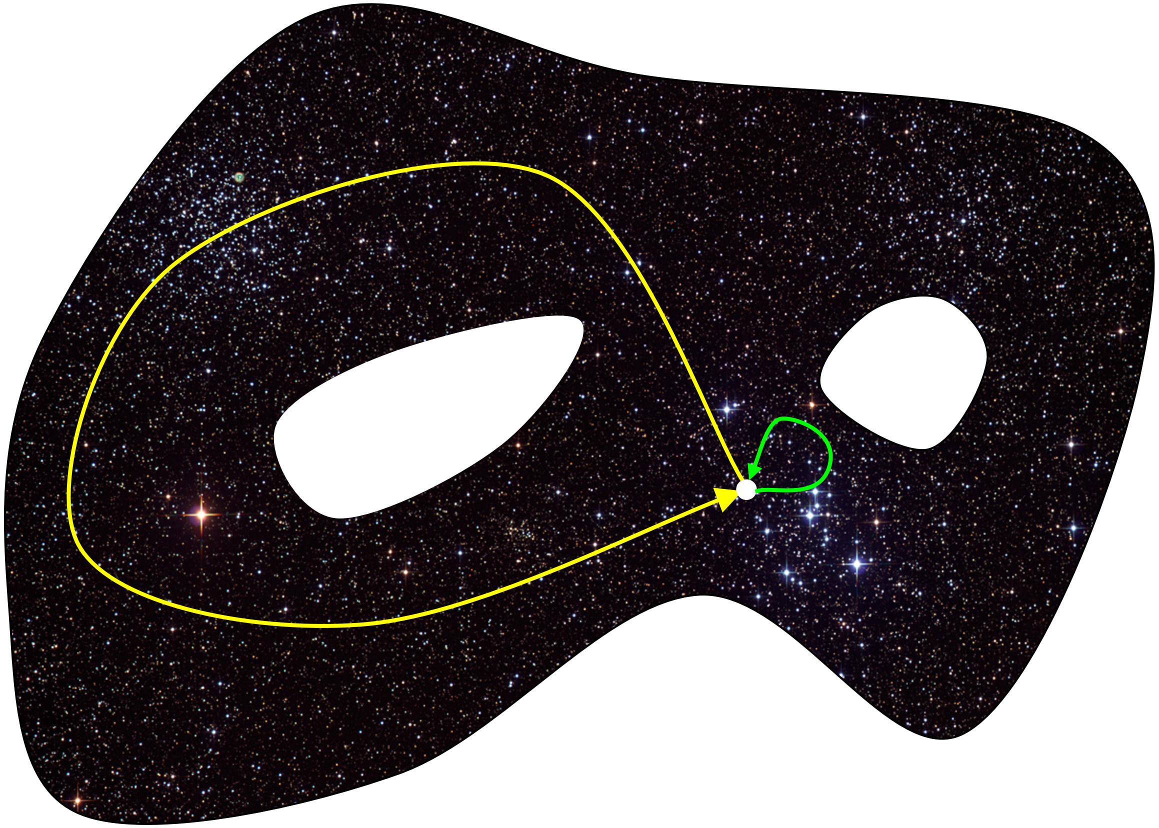
Producto de clases de homotopía



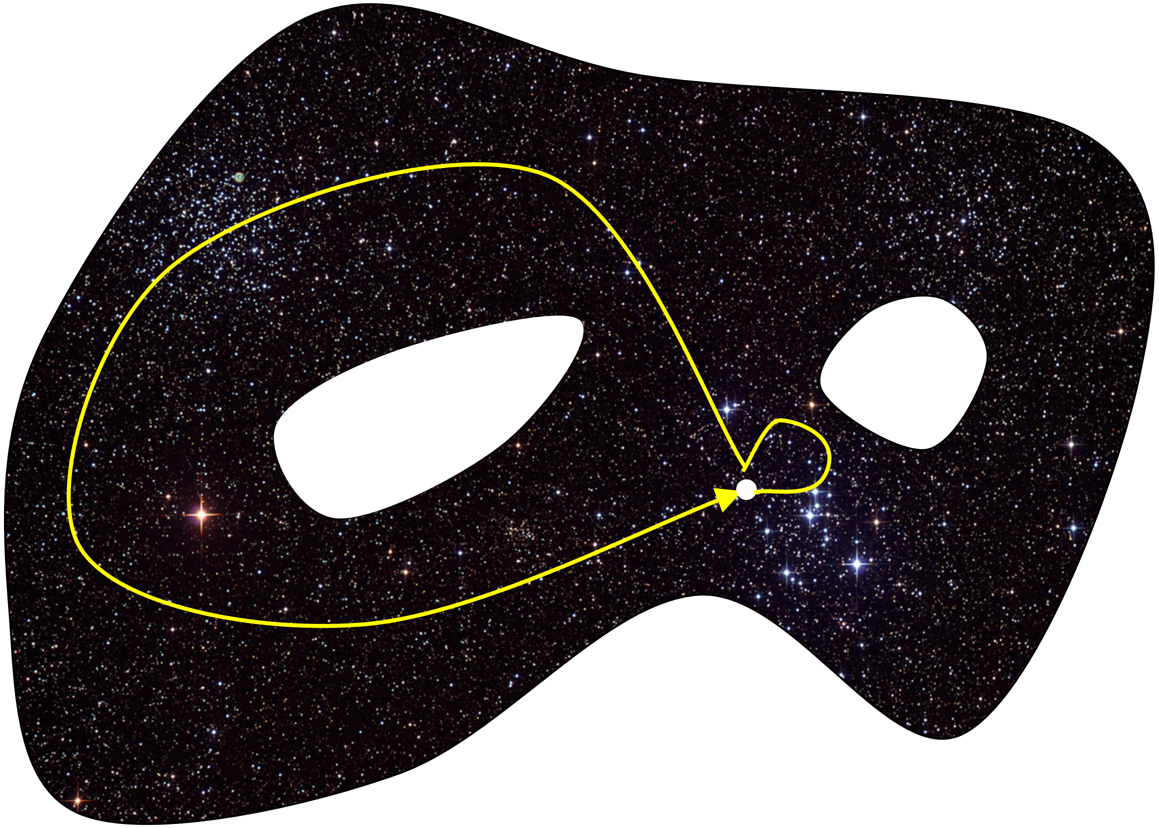
Con este producto las clases de homotopía de lazos forman un grupo.

Elemento neutro:

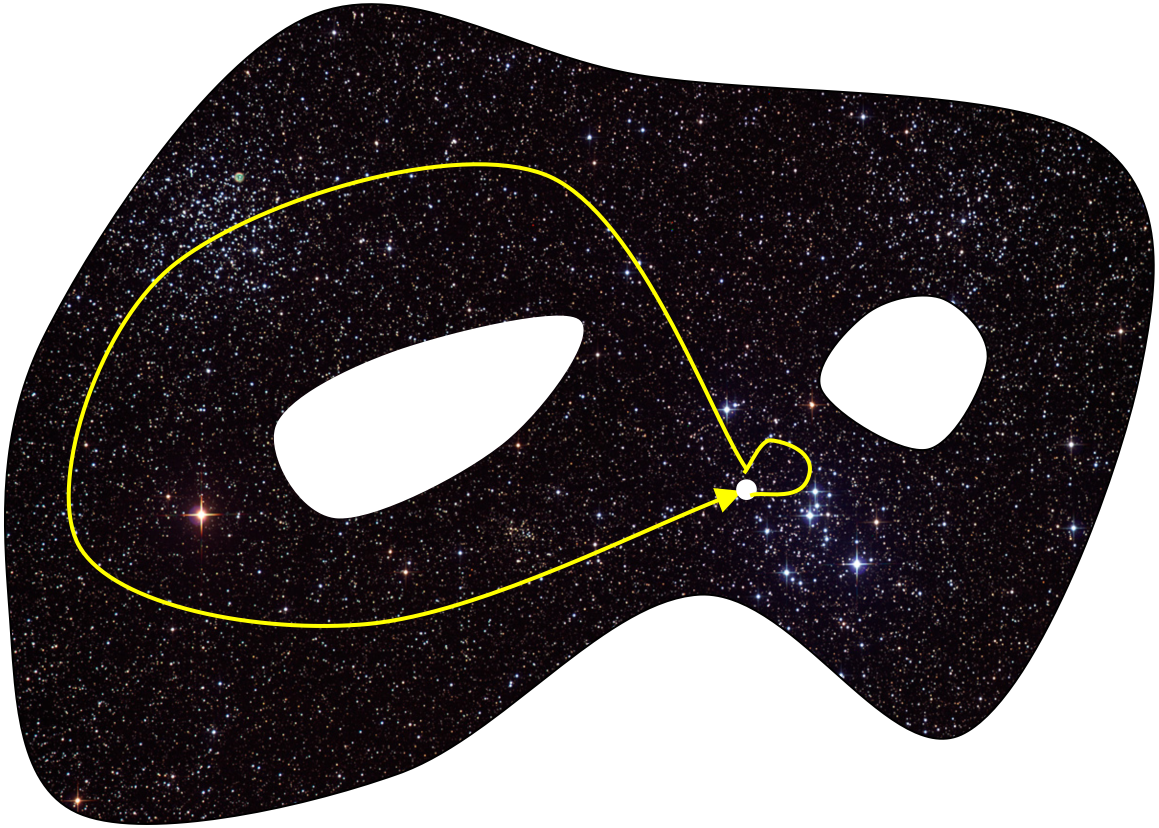
Elemento neutro:



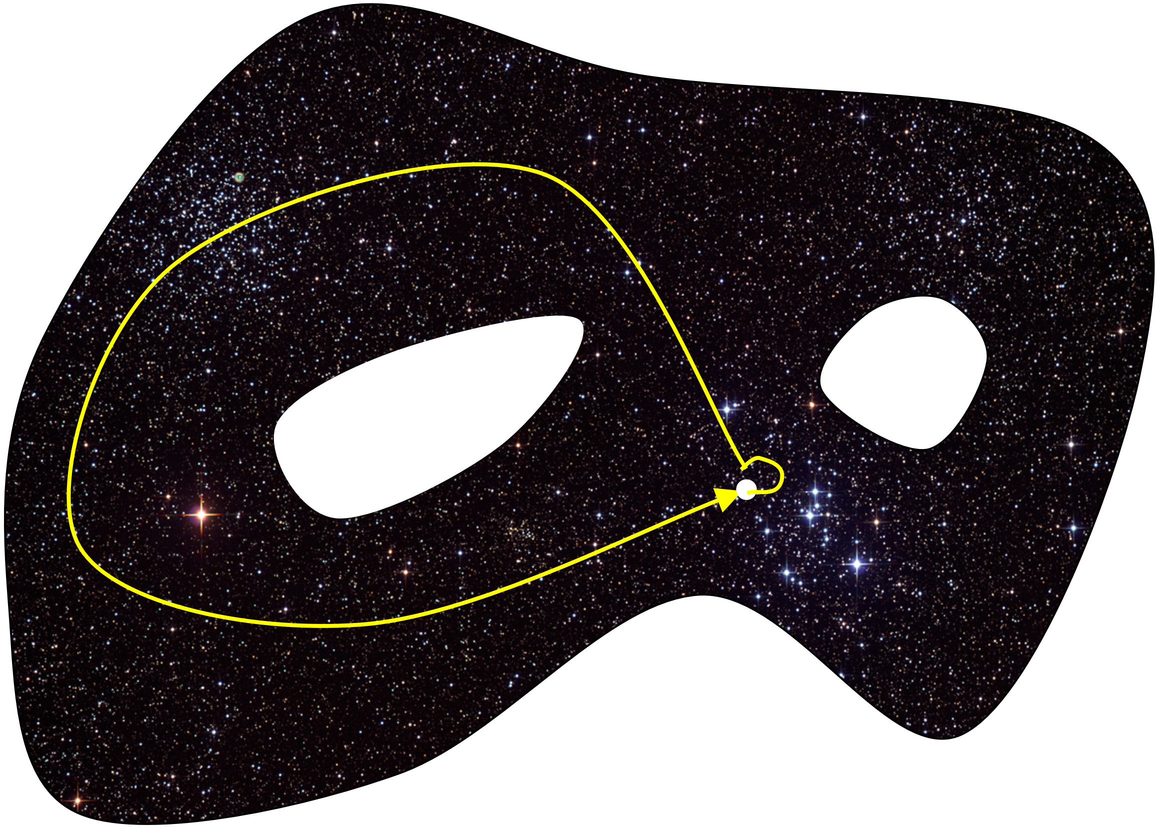
Elemento neutro:



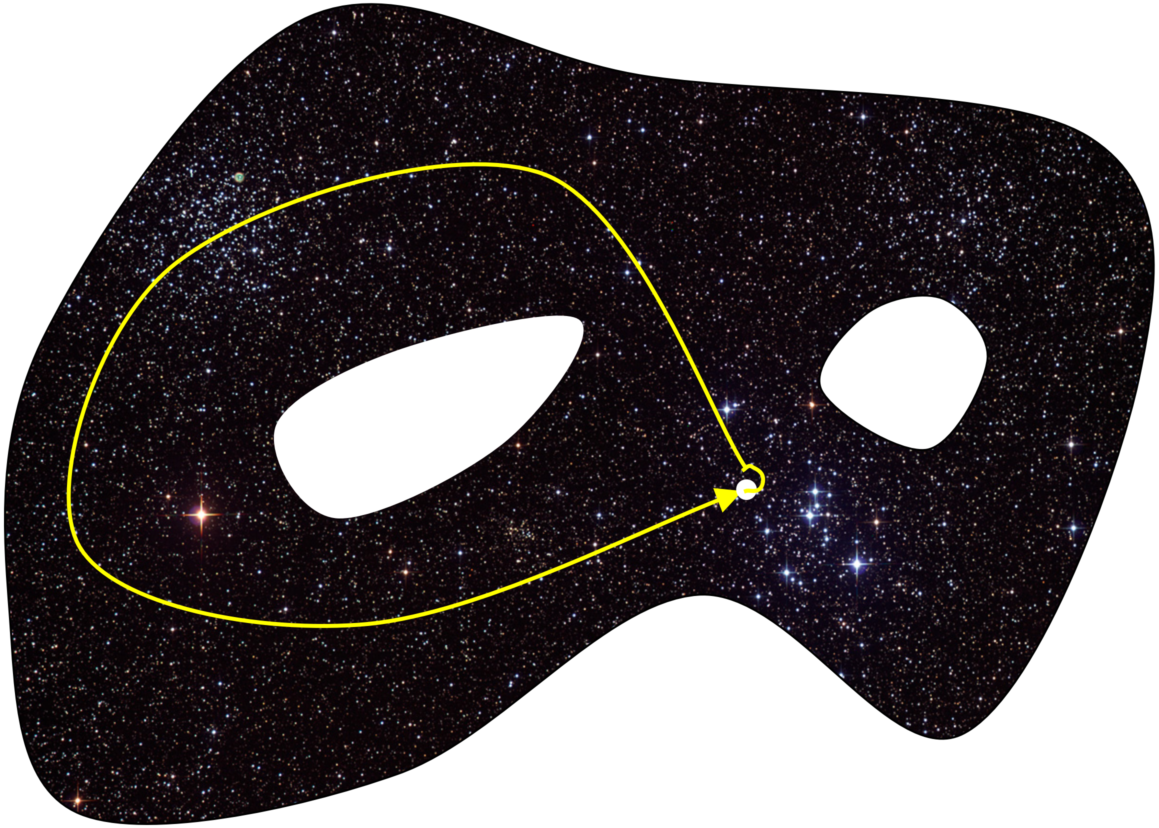
Elemento neutro:



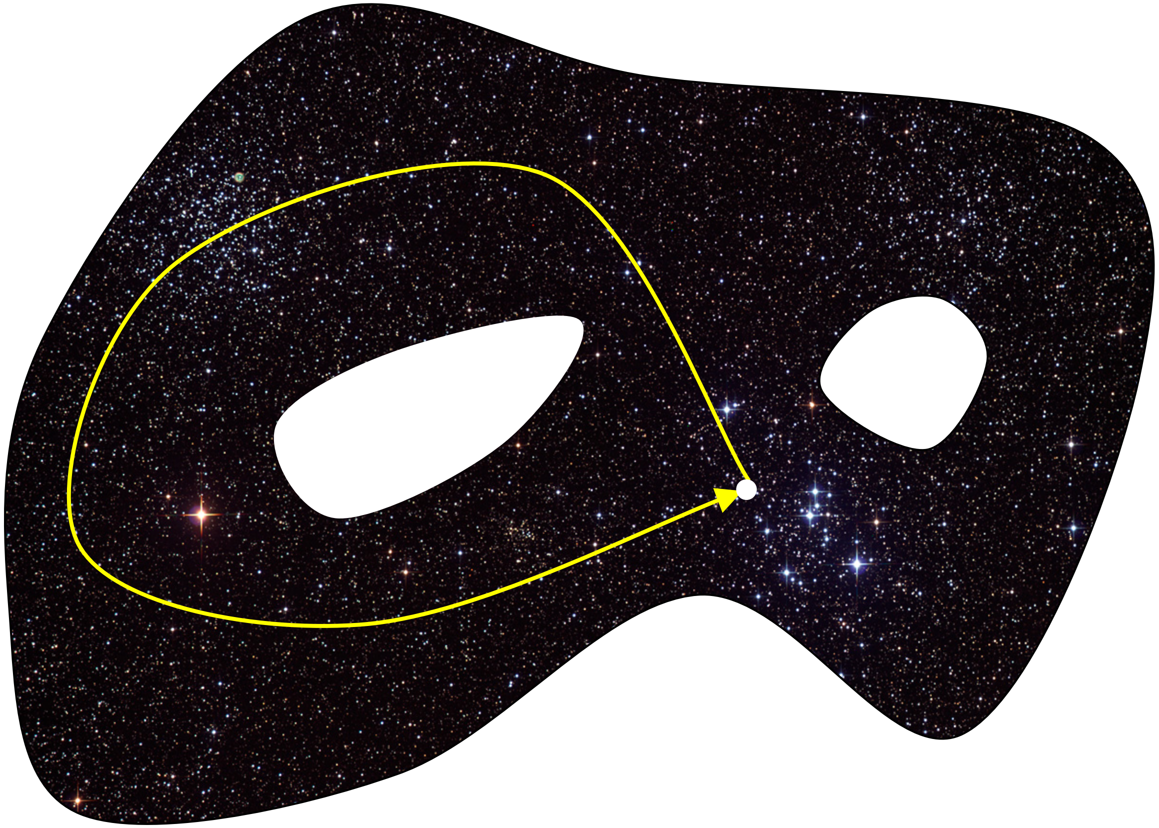
Elemento neutro:



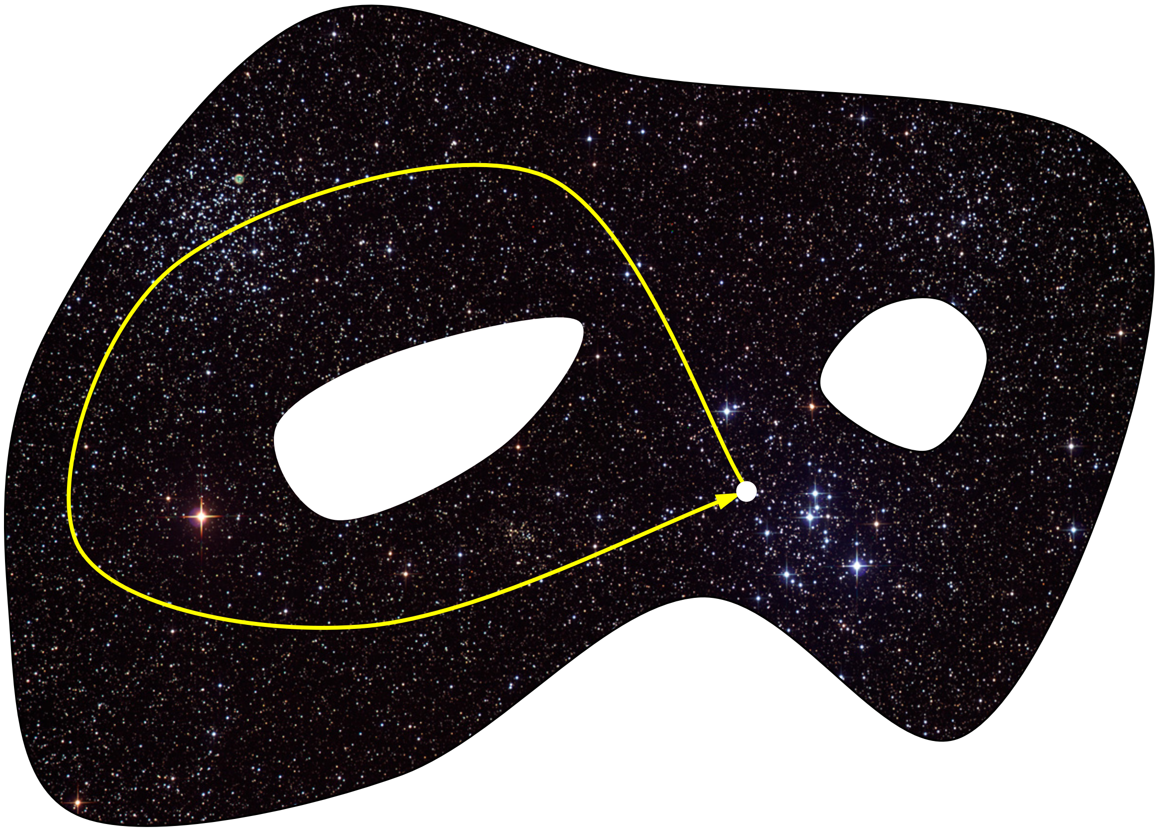
Elemento neutro:



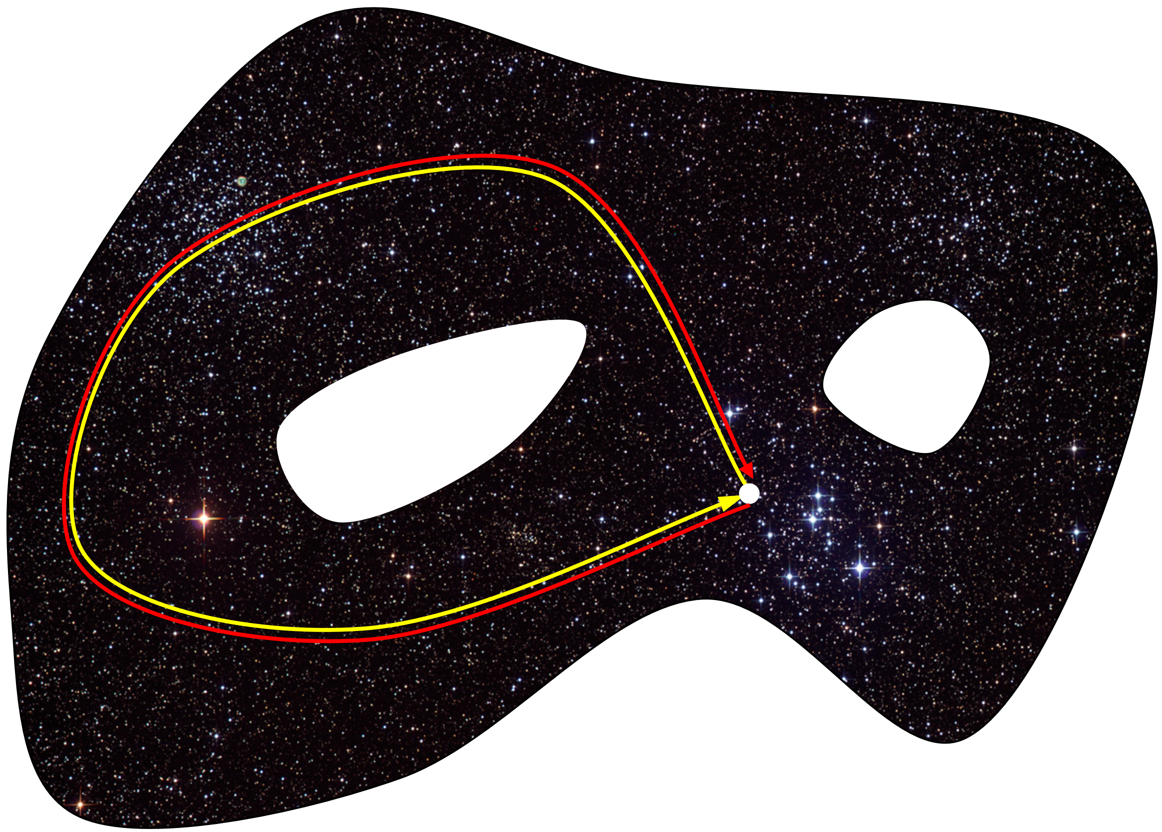
Elemento neutro:



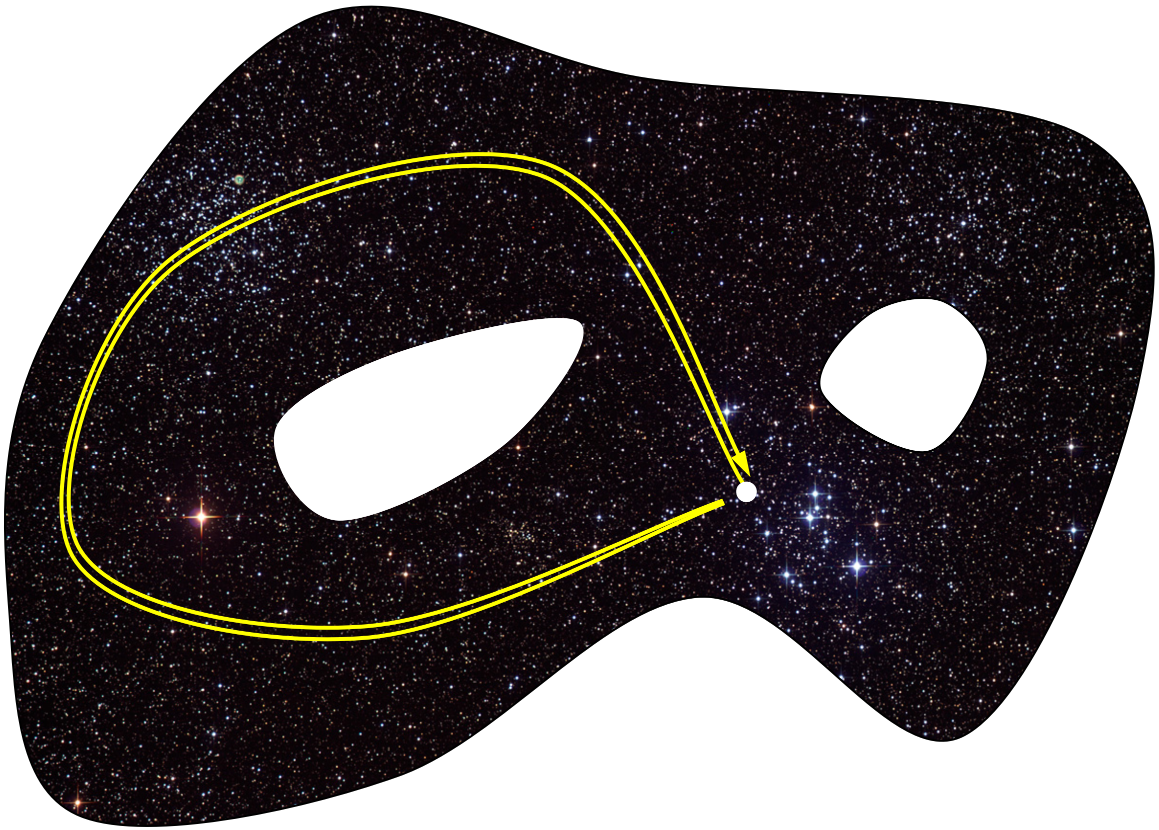
Inversos



Inversos



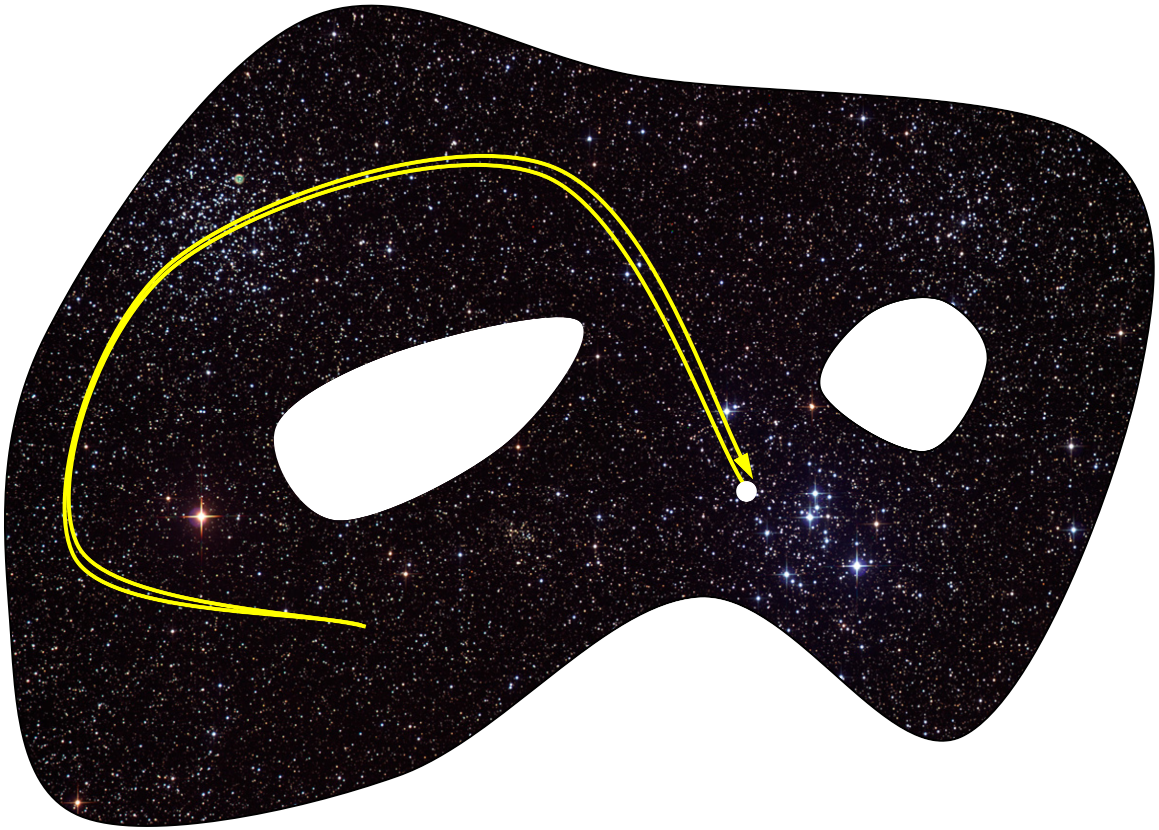
Inversos



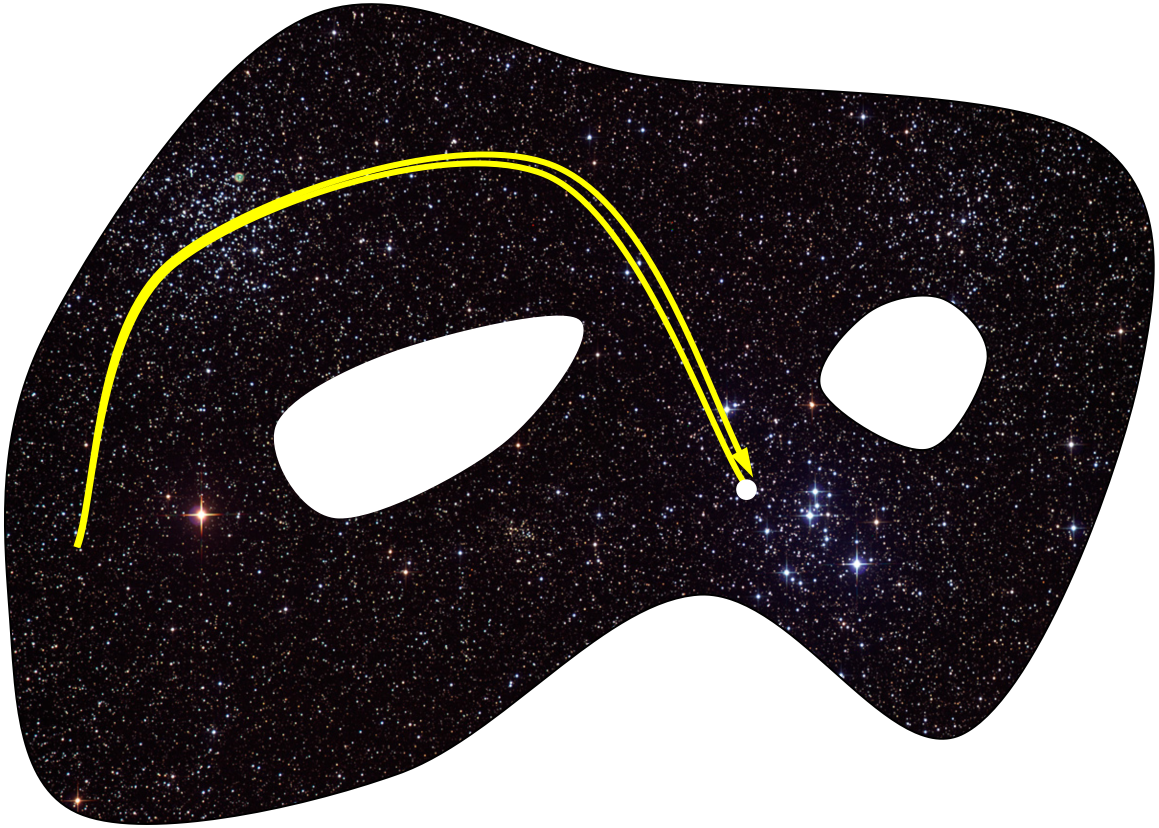
Inversos

Inversos

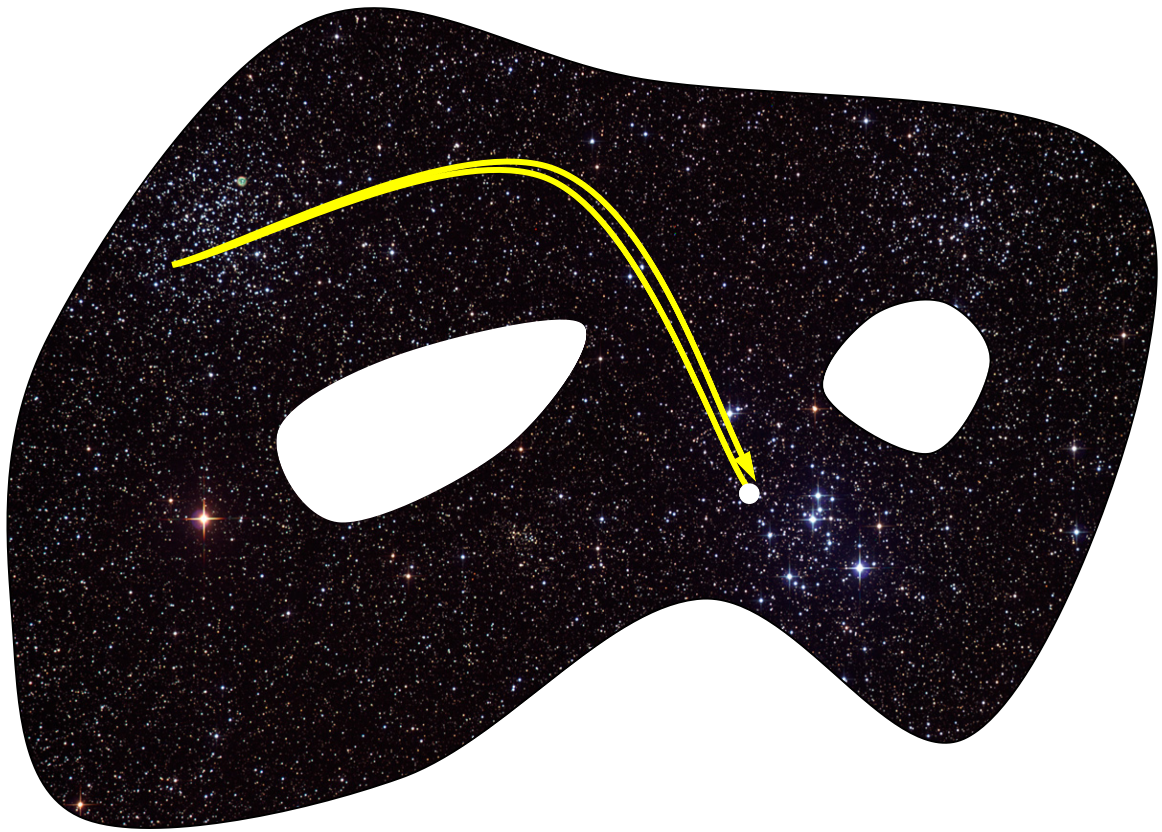
Inversos



Inversos



Inversos



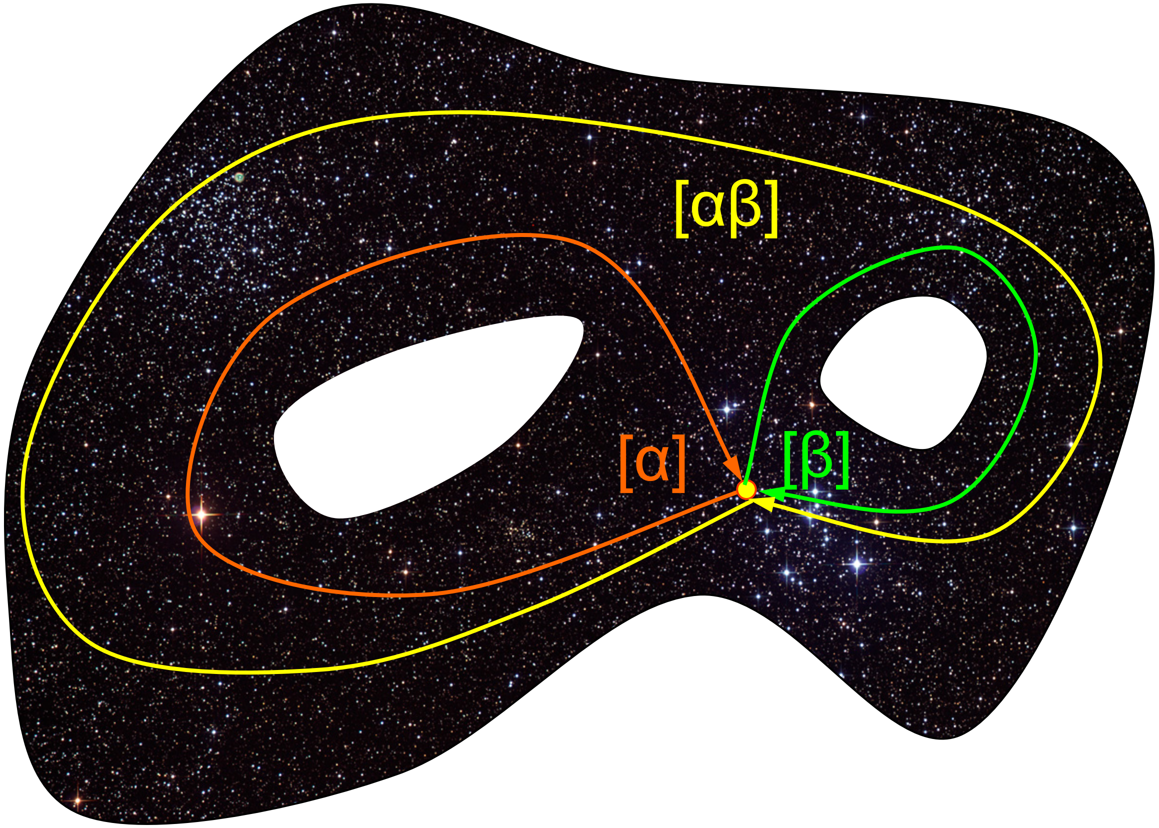
Inversos

Inversos

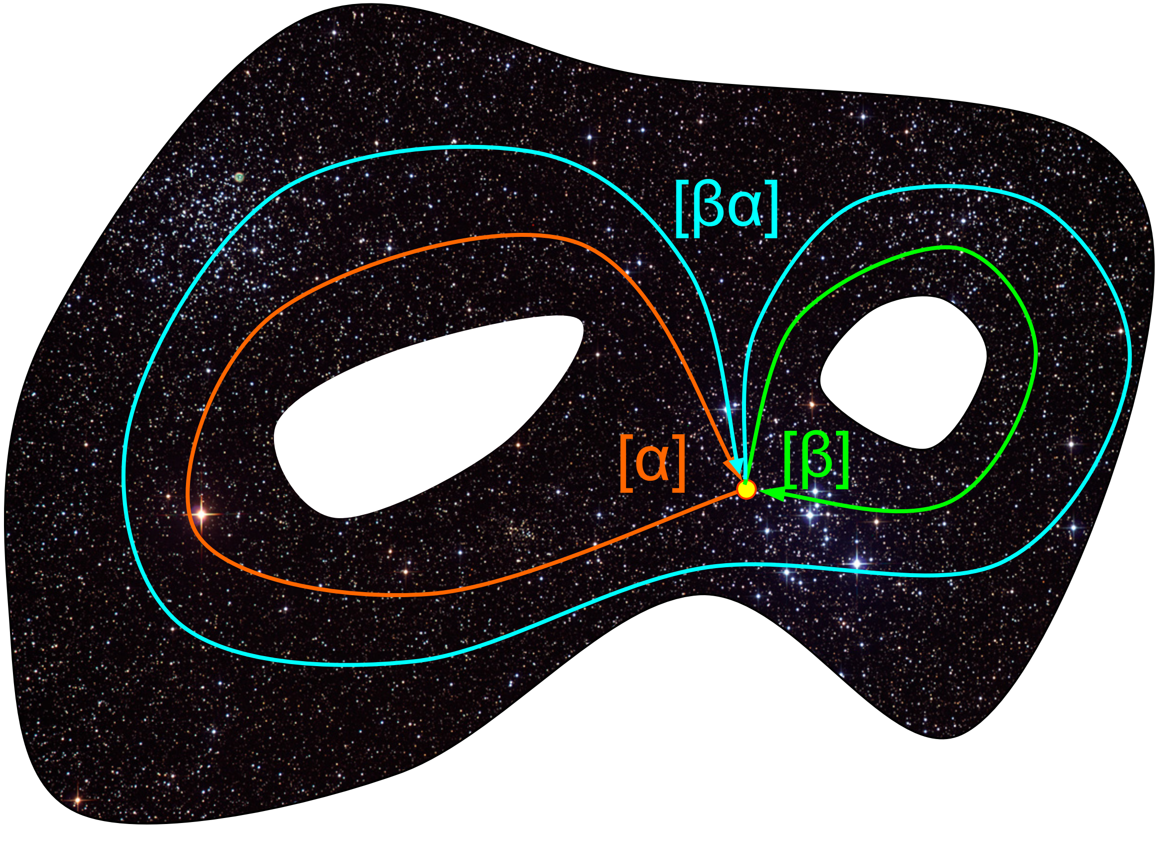
Inversos

Inversos

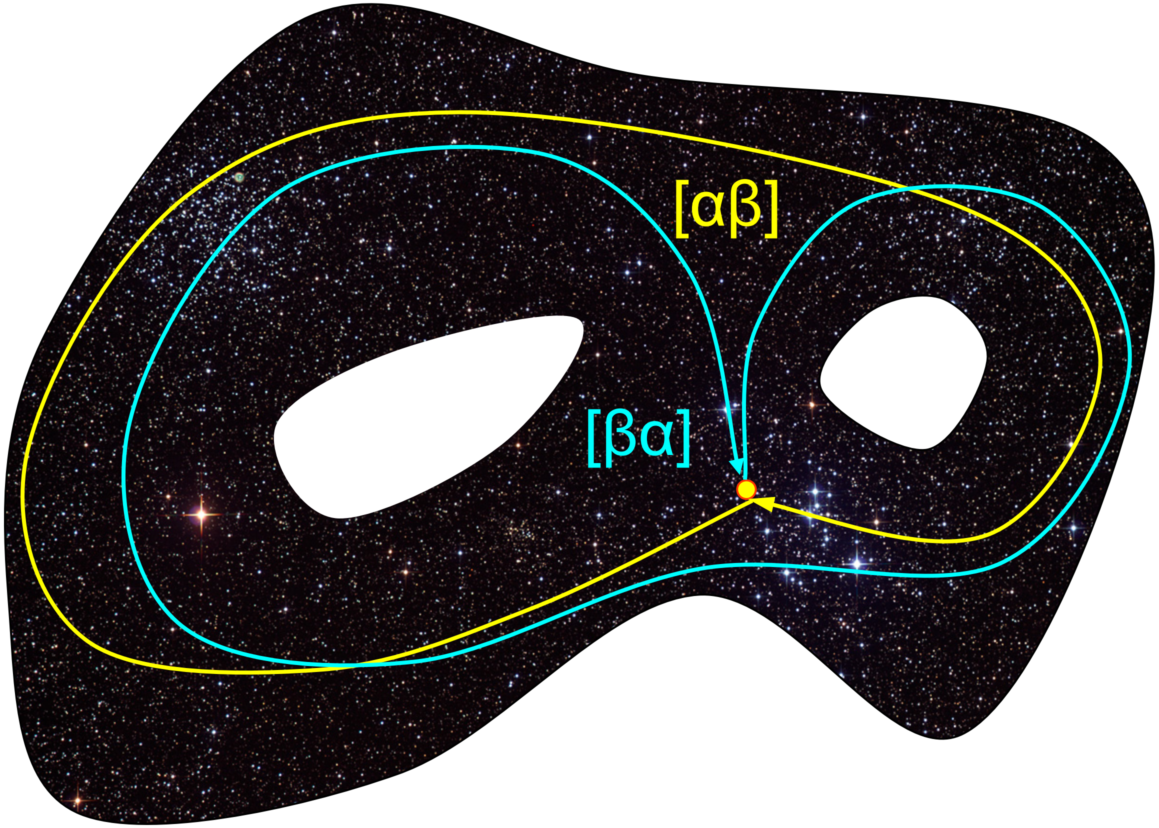
El producto es asociativo pero no es conmutativo:



El producto es asociativo pero no es conmutativo:

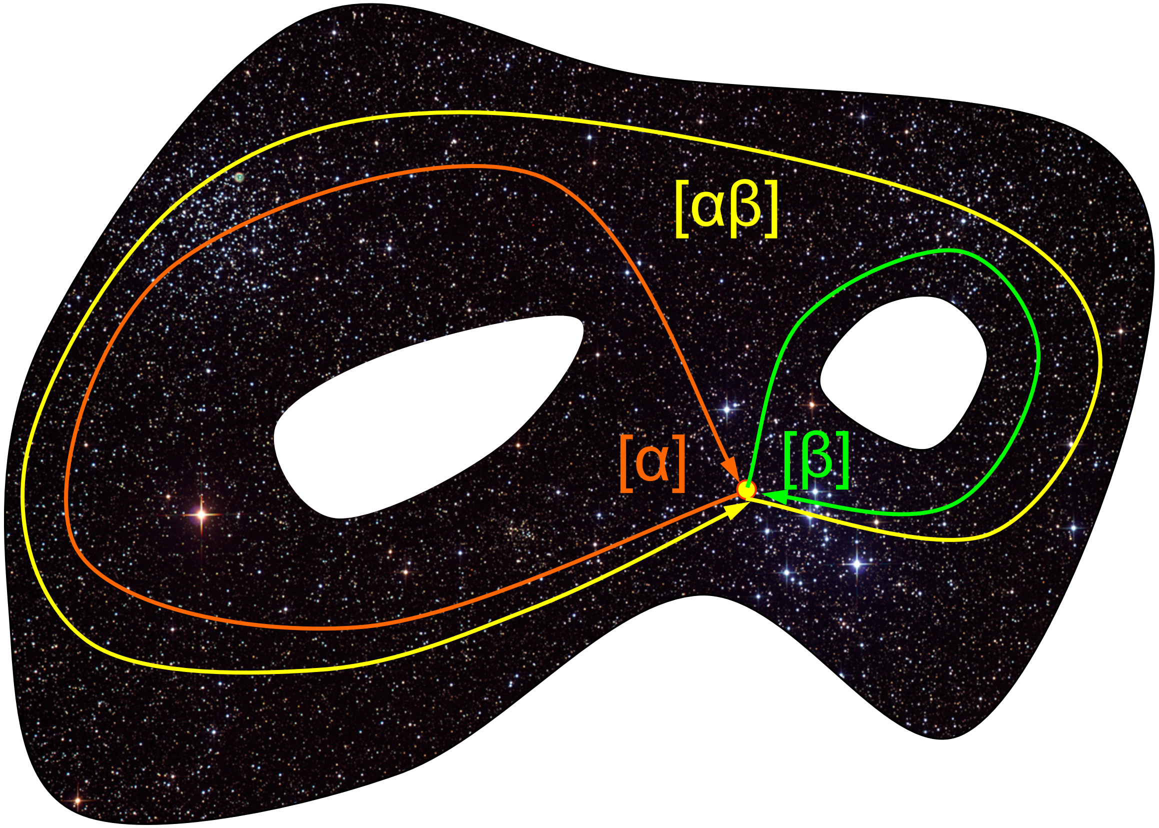


El producto es asociativo pero no es conmutativo:



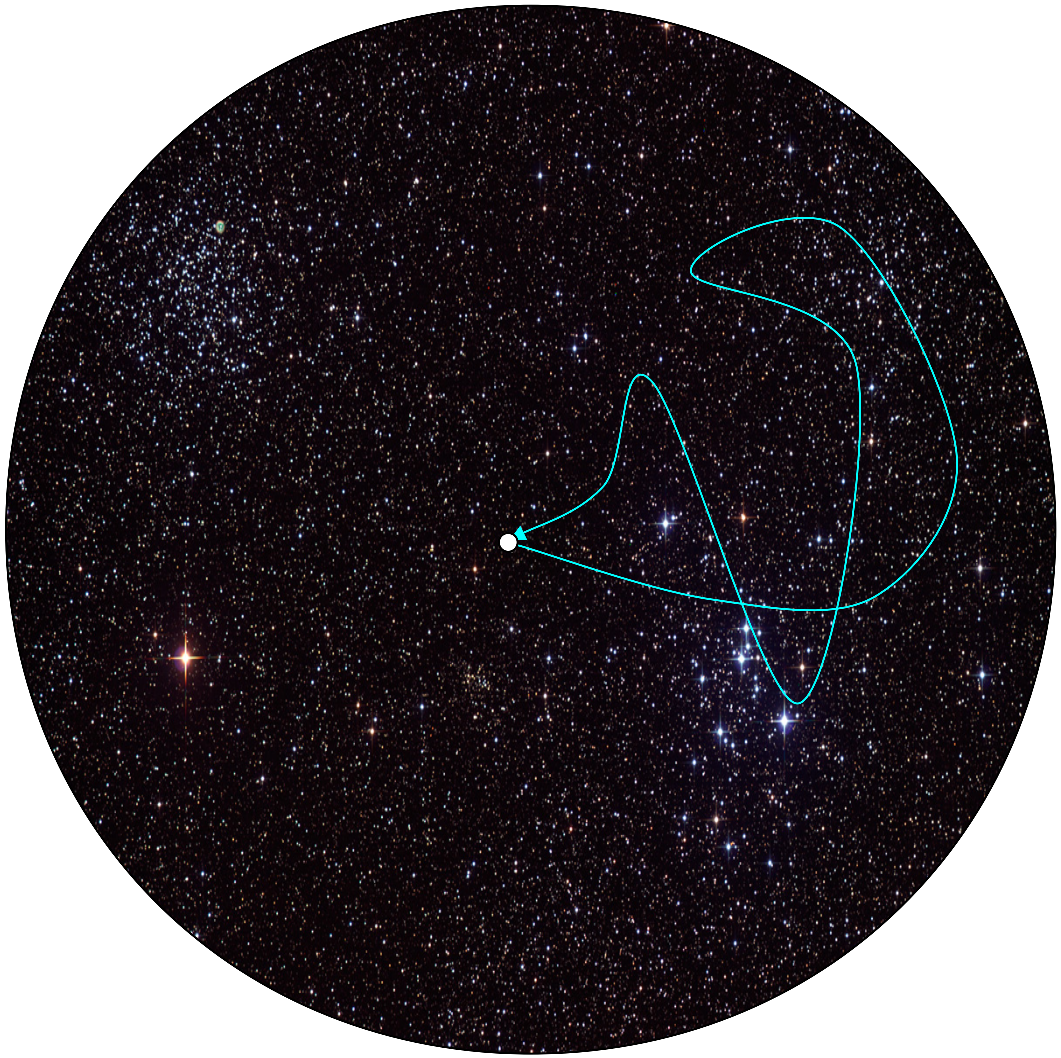
[αβ] no es igual a [βα]

Grupo fundamental

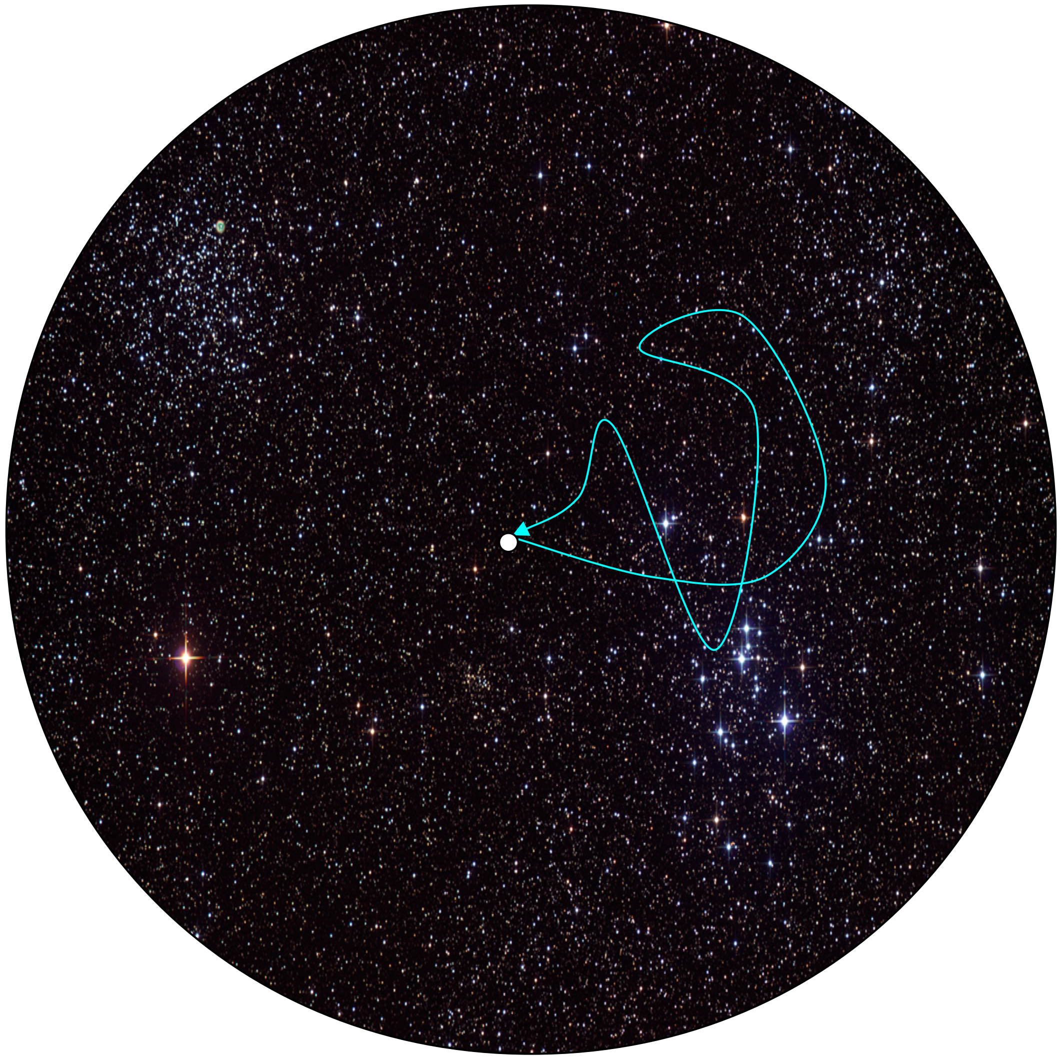


Al grupo formado por las clases de homotopía de lazos en M se le llama el Grupo Fundamental de M y se le denota por $\pi_1(M)$.

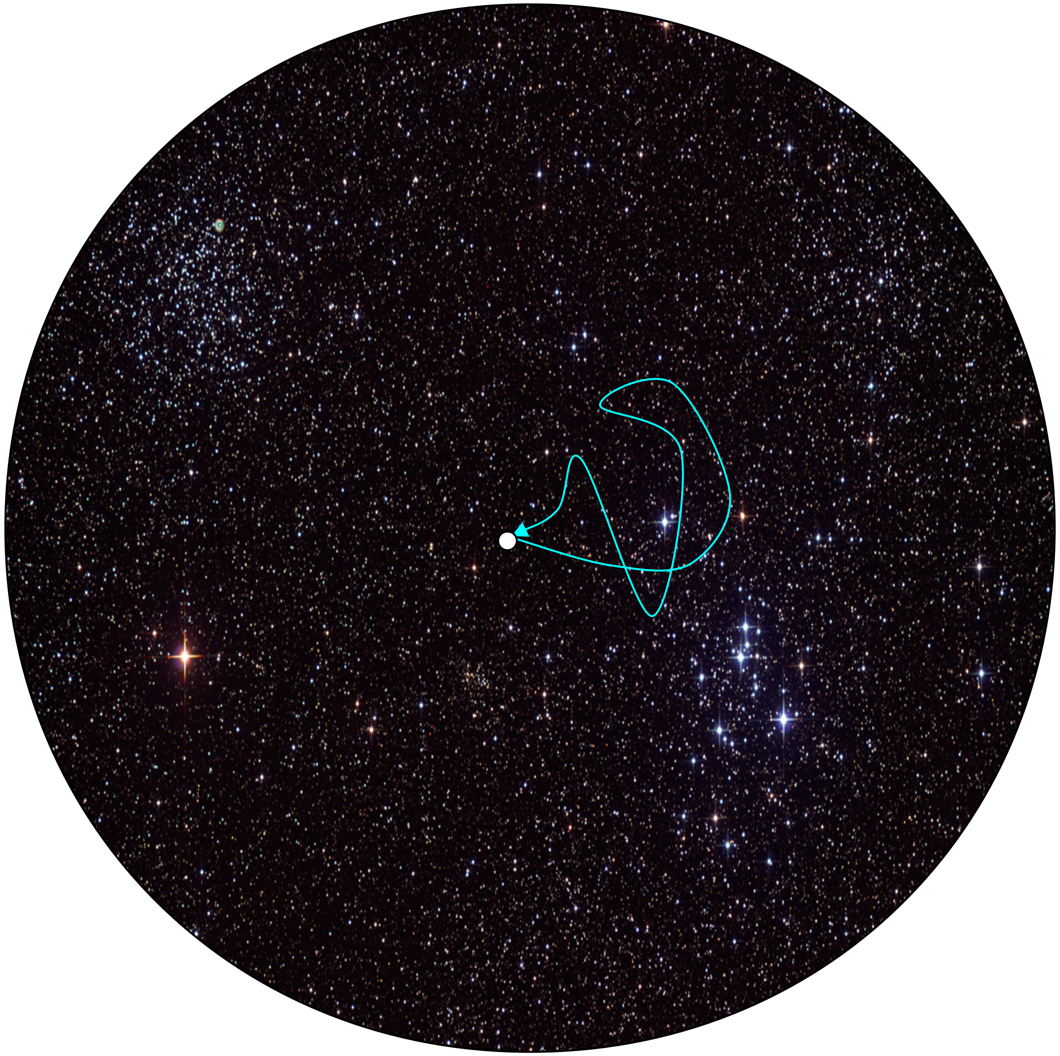
R^3



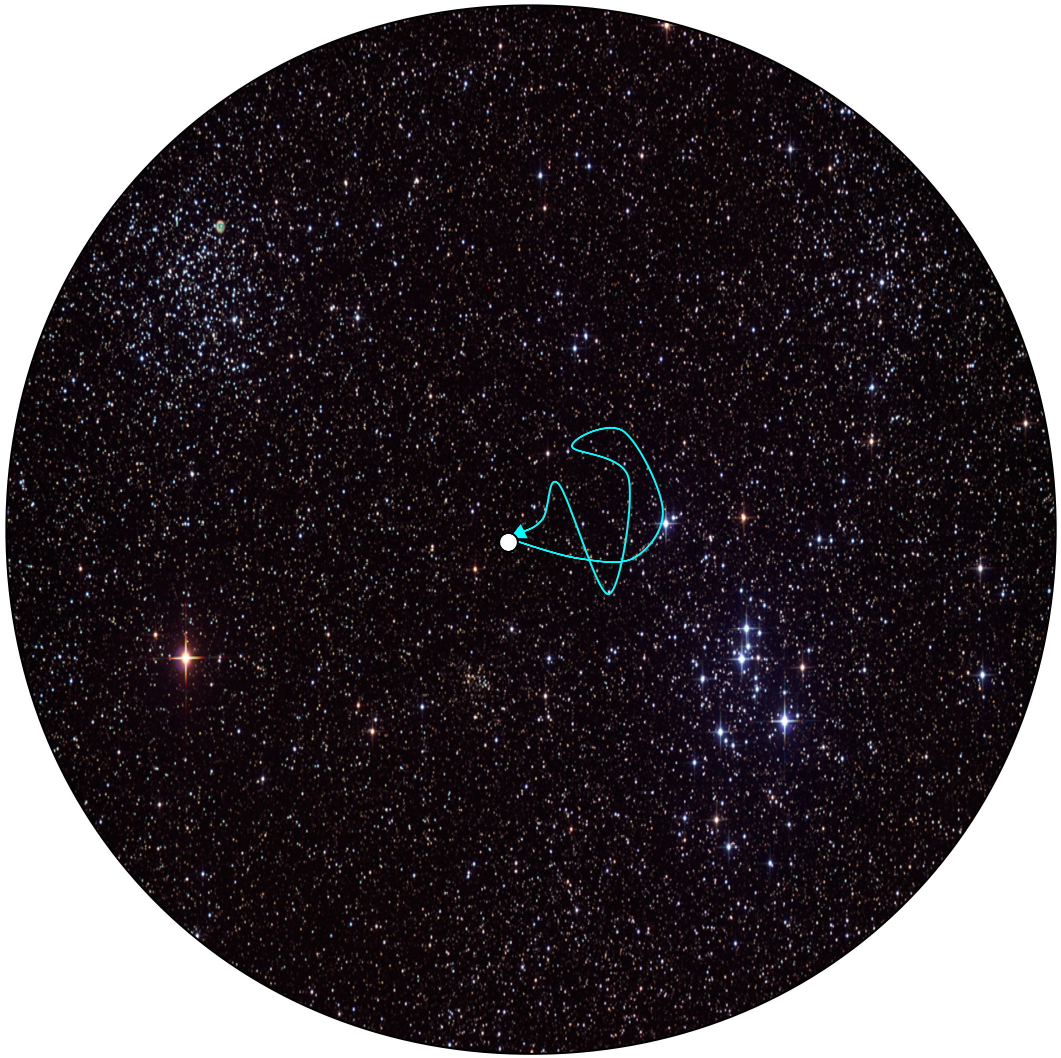
R^3



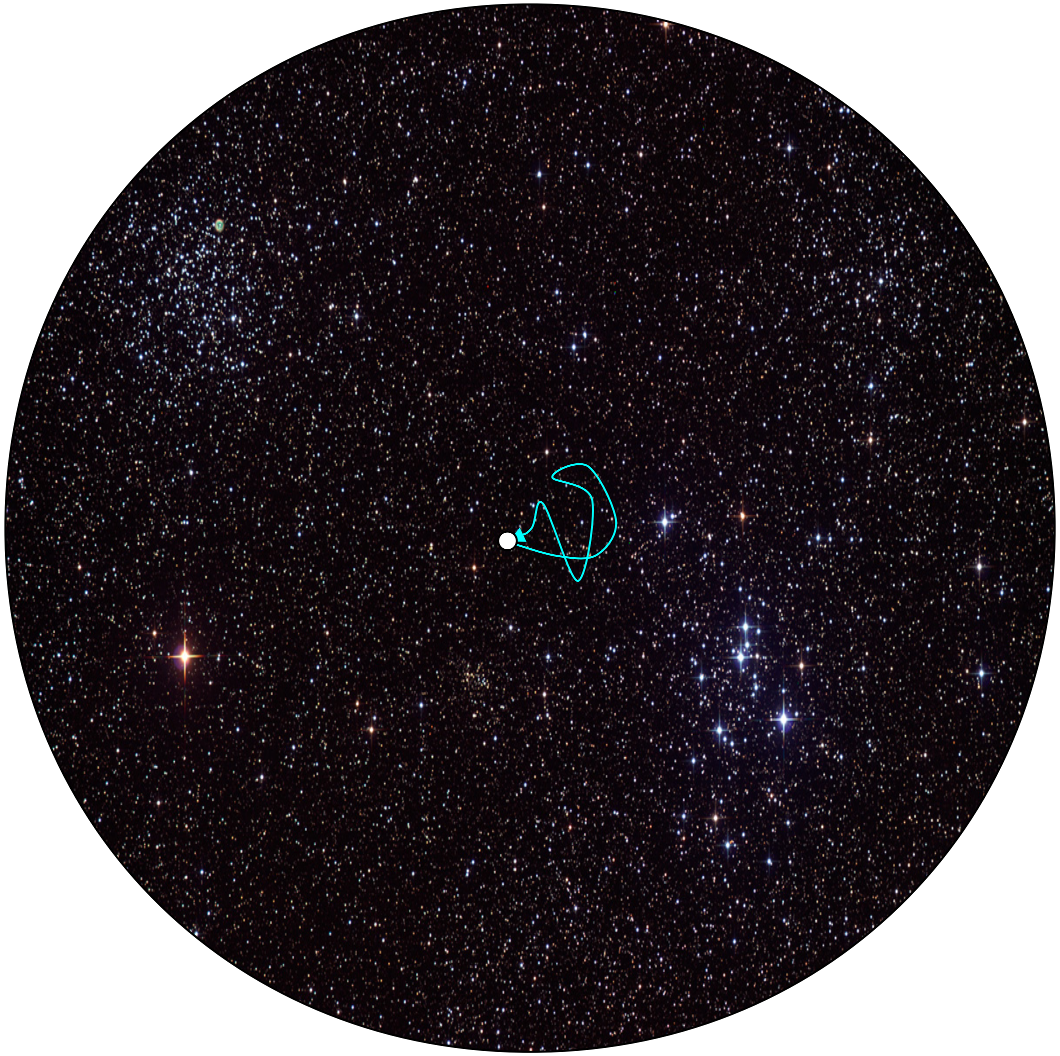
R3



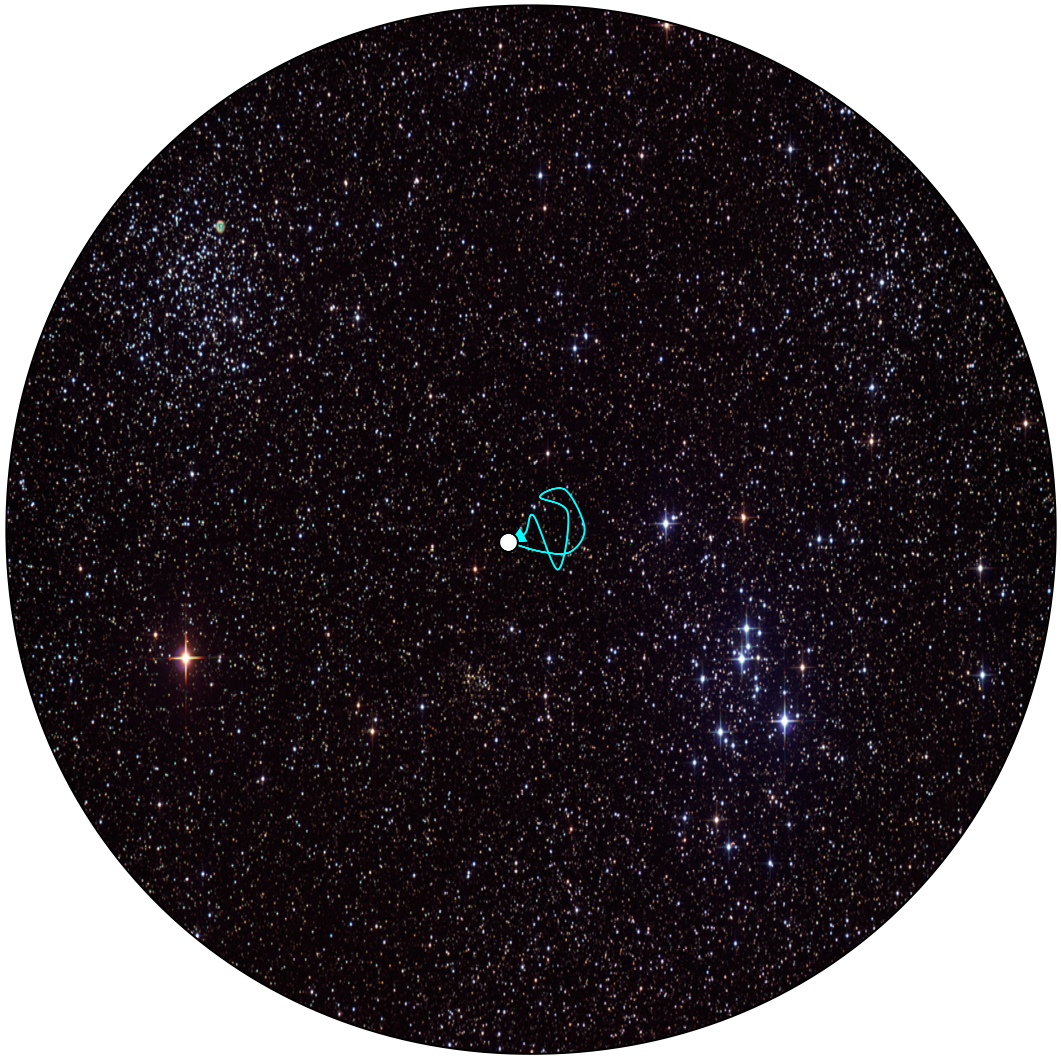
R3



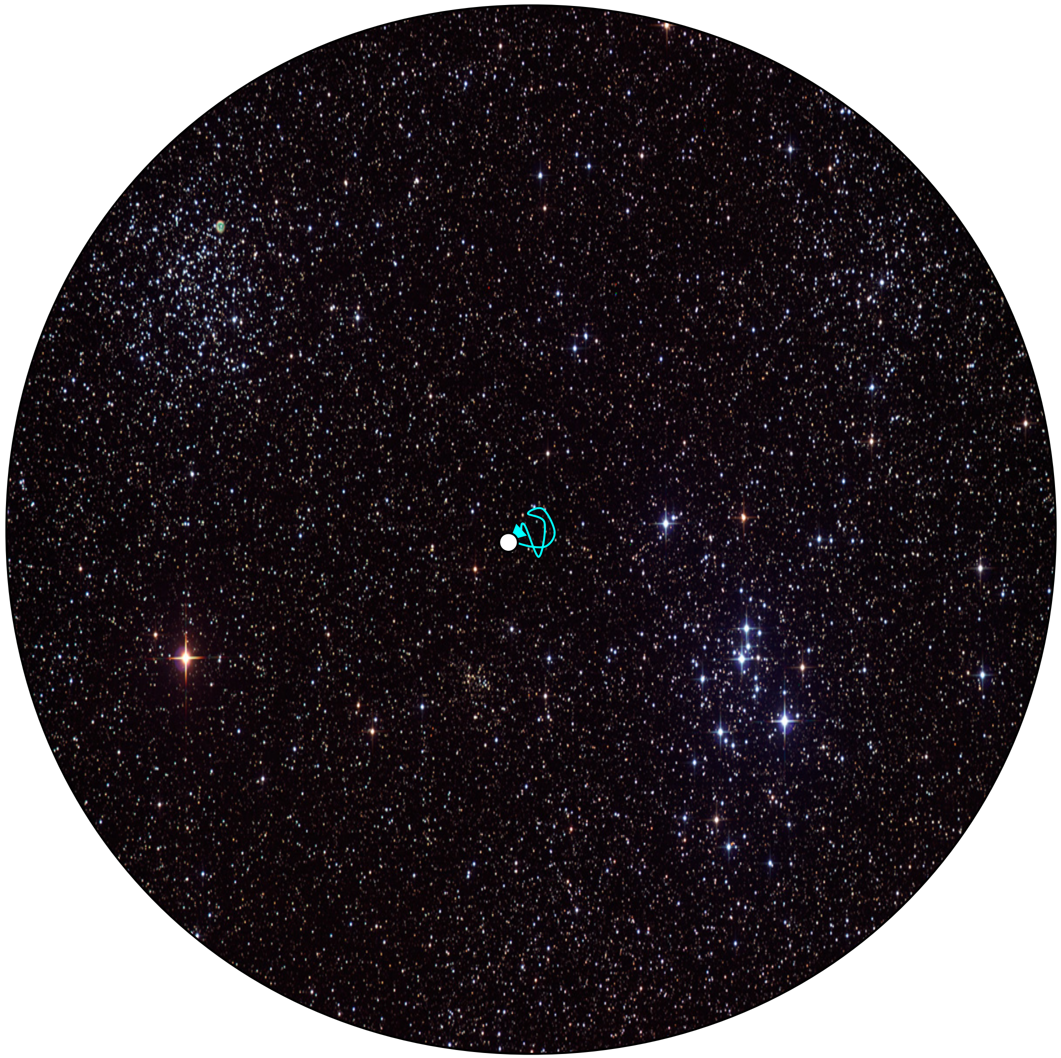
R3



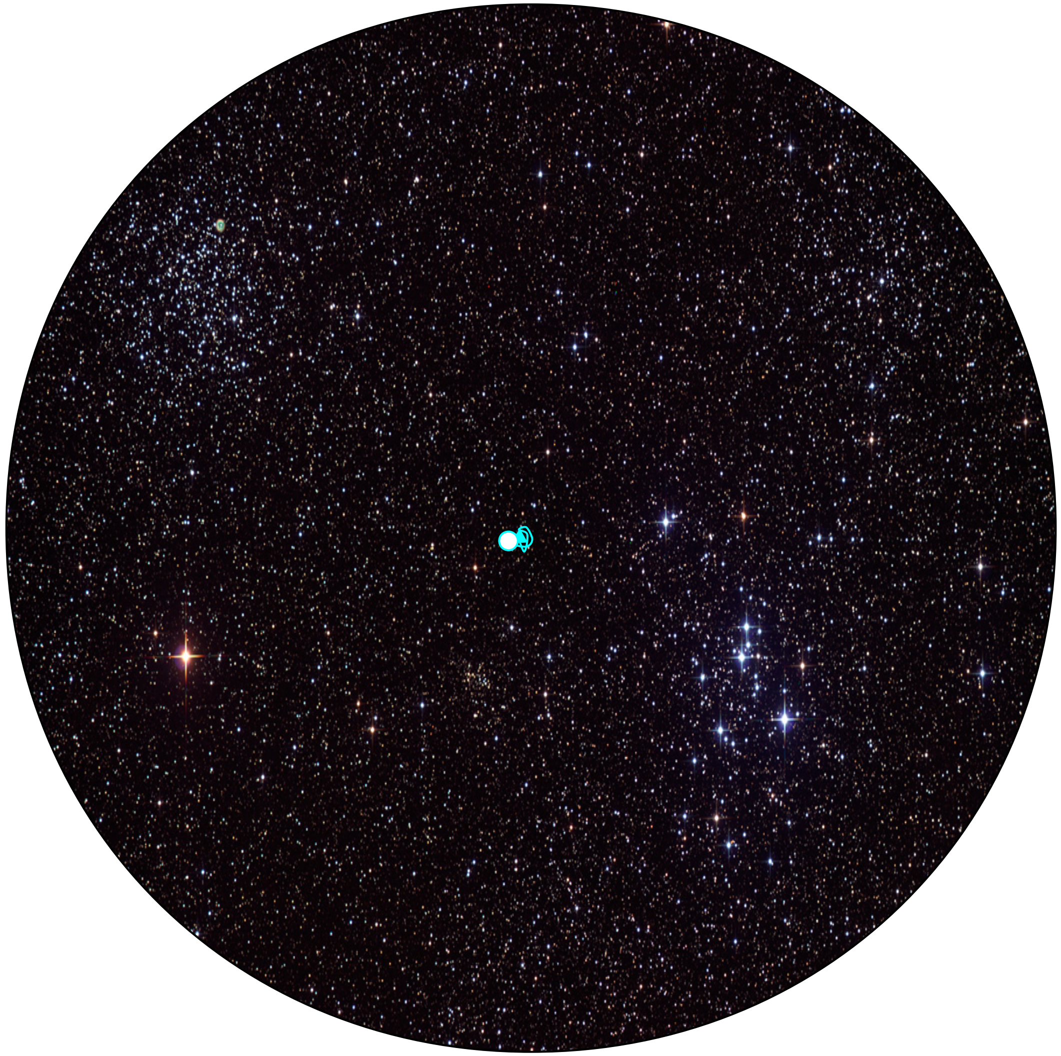
R^3



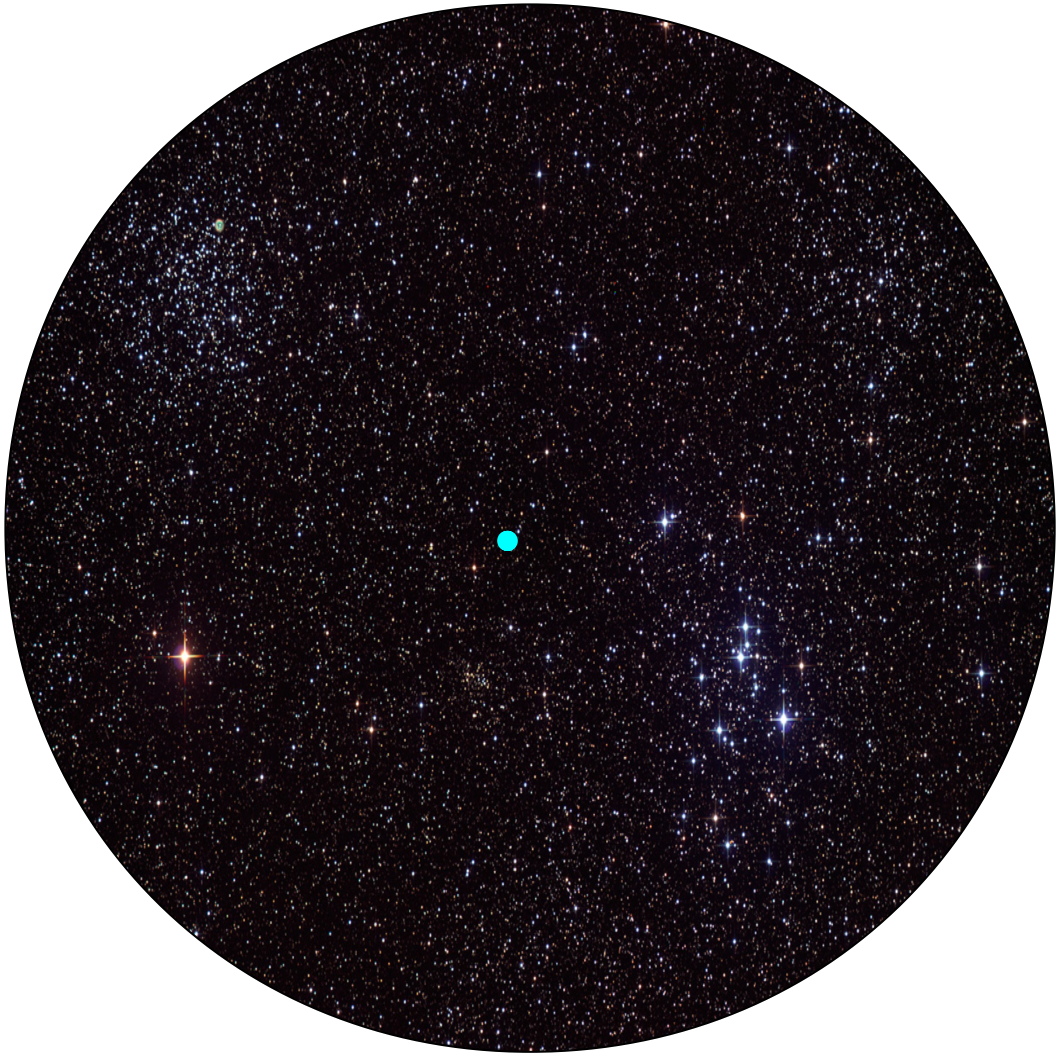
R^3



R^3

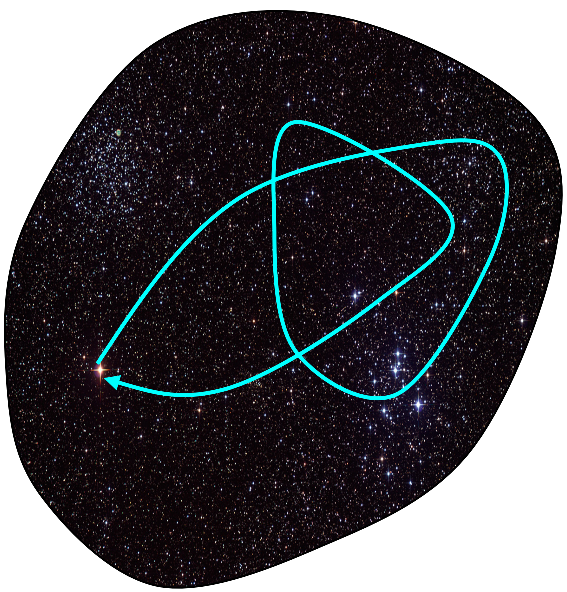


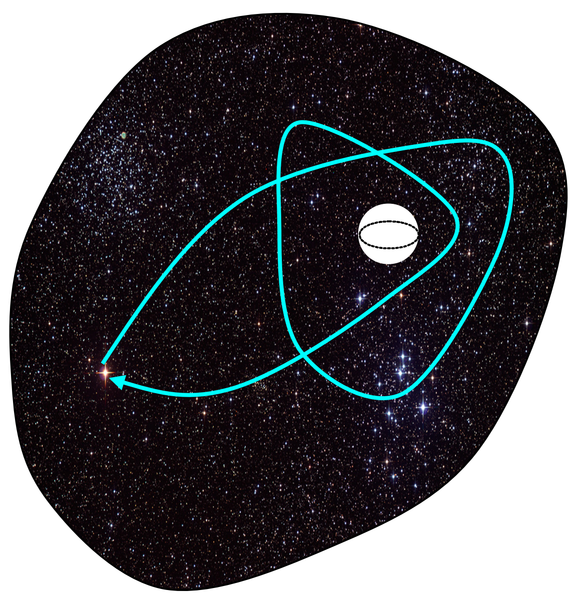
$\pi_1(R^3) = 0$



$$\pi_1(S^3) = ?$$

Afirmación: Si a una variedad se le quita un punto o una bola, el grupo fundamental no cambia.



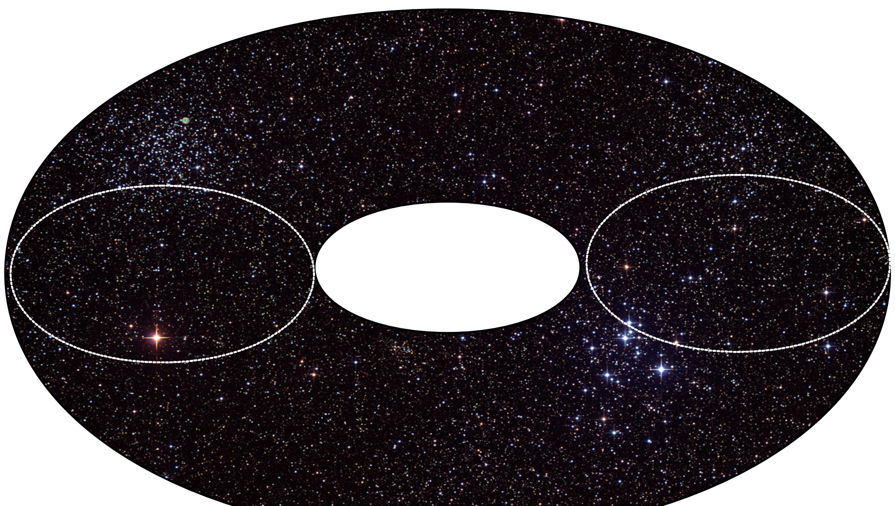


$$\pi_1(S^3) = ?$$

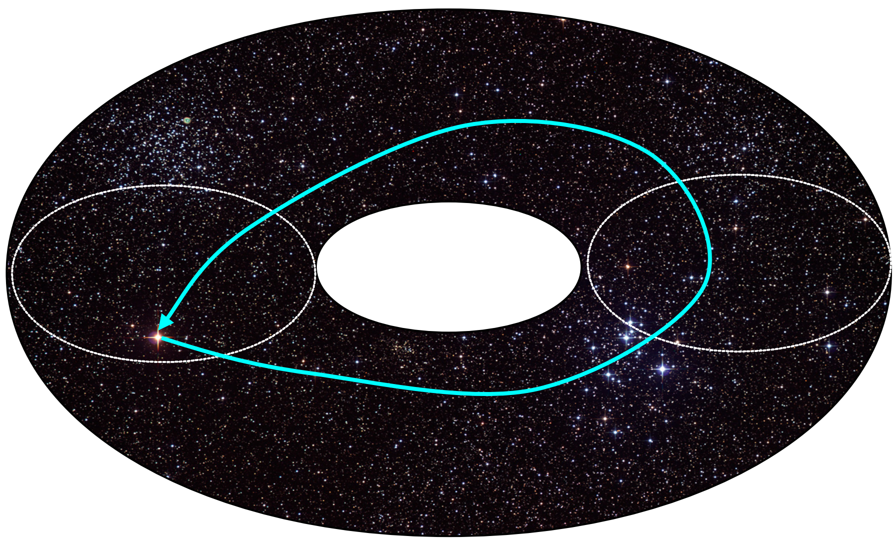
Afirmación: Si a una variedad se le quita un punto o una bola, el grupo fundamental no cambia.

Como R^3 es igual a S^3 menos un punto, $\pi_1(S^3) = \pi_1(R^3) = 0$

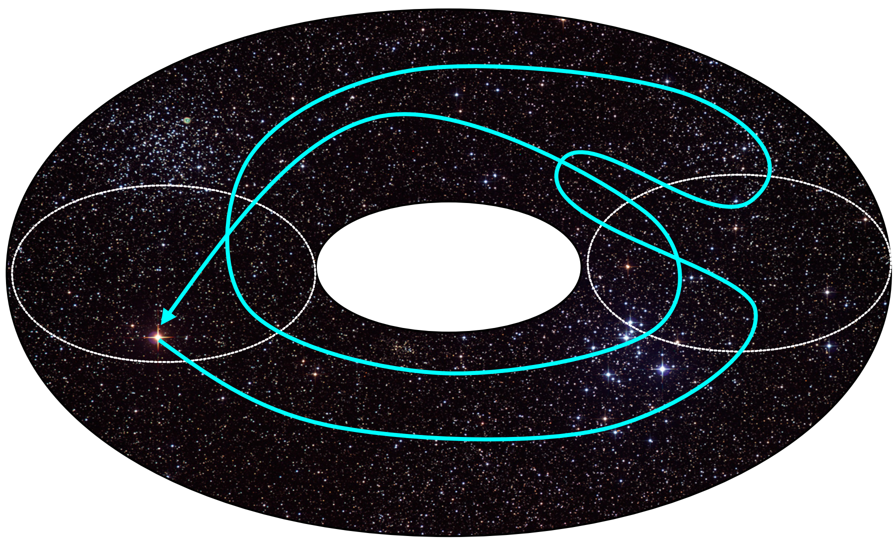
$$\pi_1(R^2 \times S^1) = ?$$



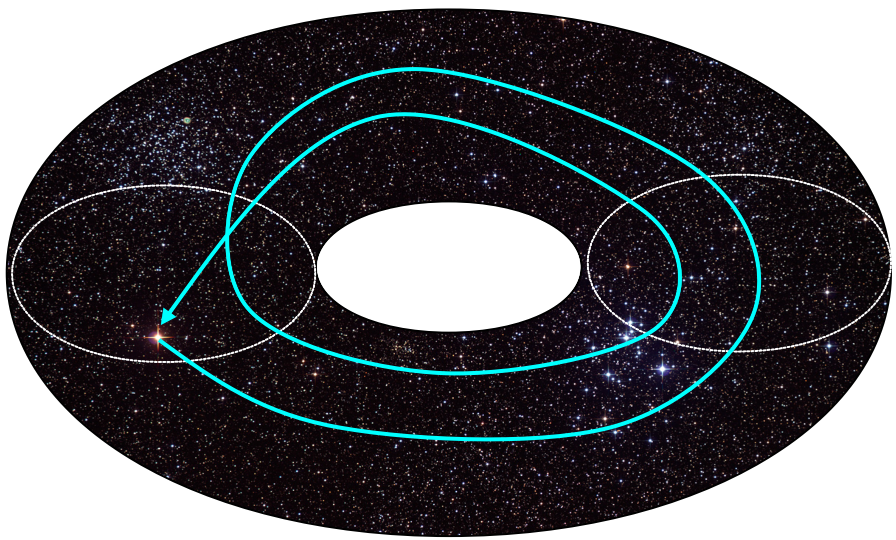
$\pi_1(R^2 \times S^1) = ?$



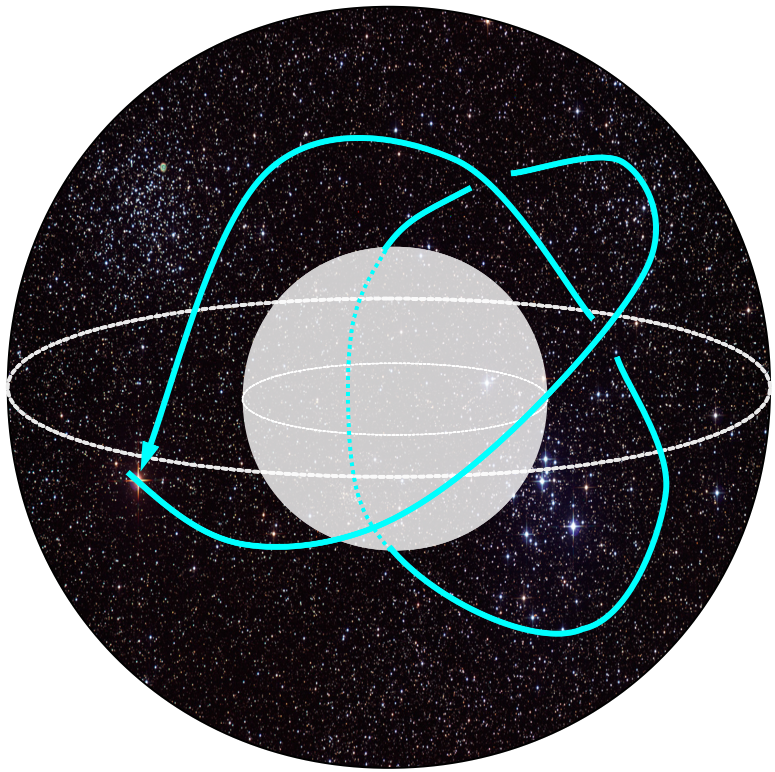
$\pi_1(R^2 \times S^1) = ?$



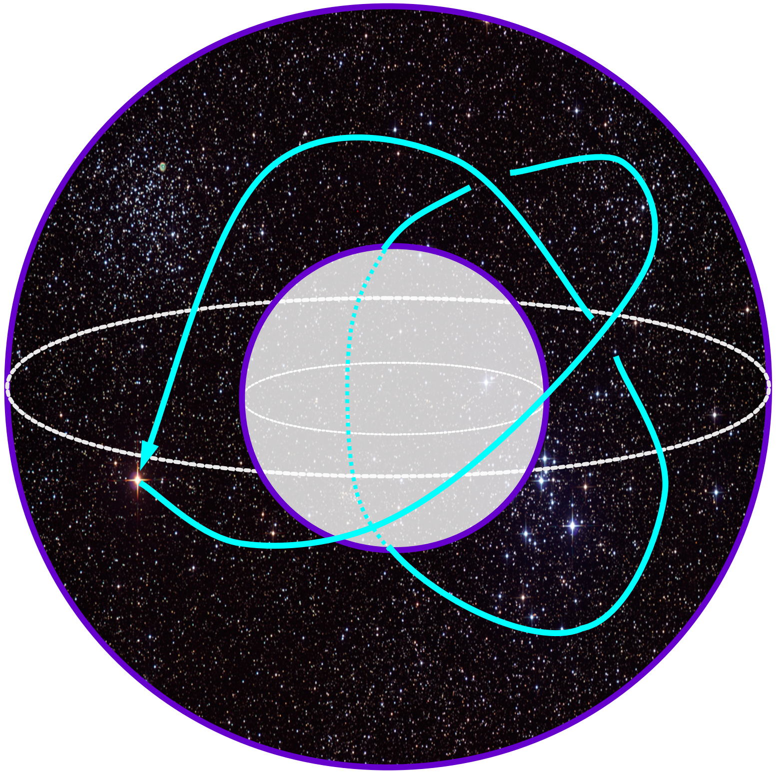
$$\pi_1(R^2 \times S^1) = Z$$



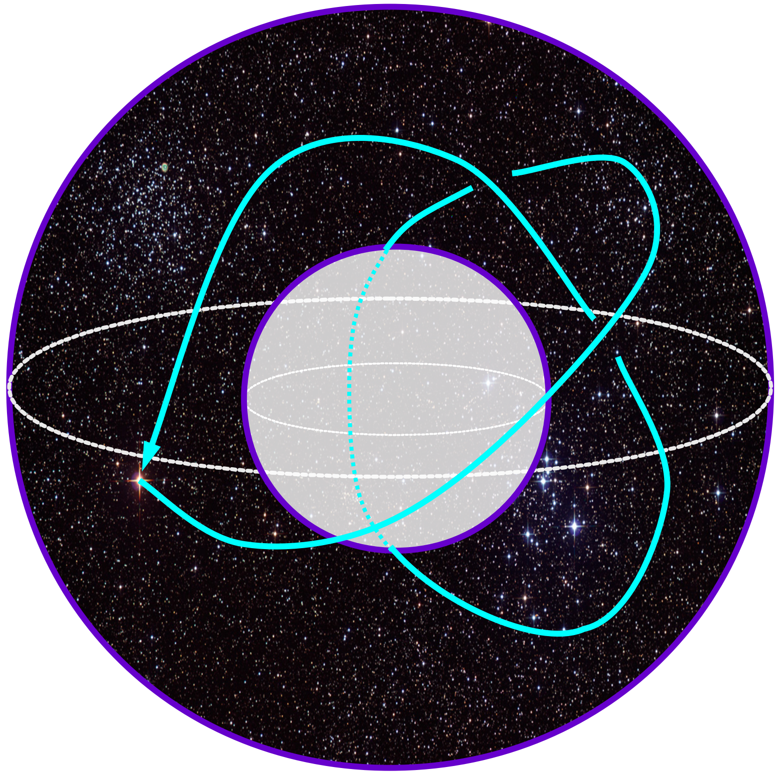
$\pi_1(S^2 \times R) = ?$



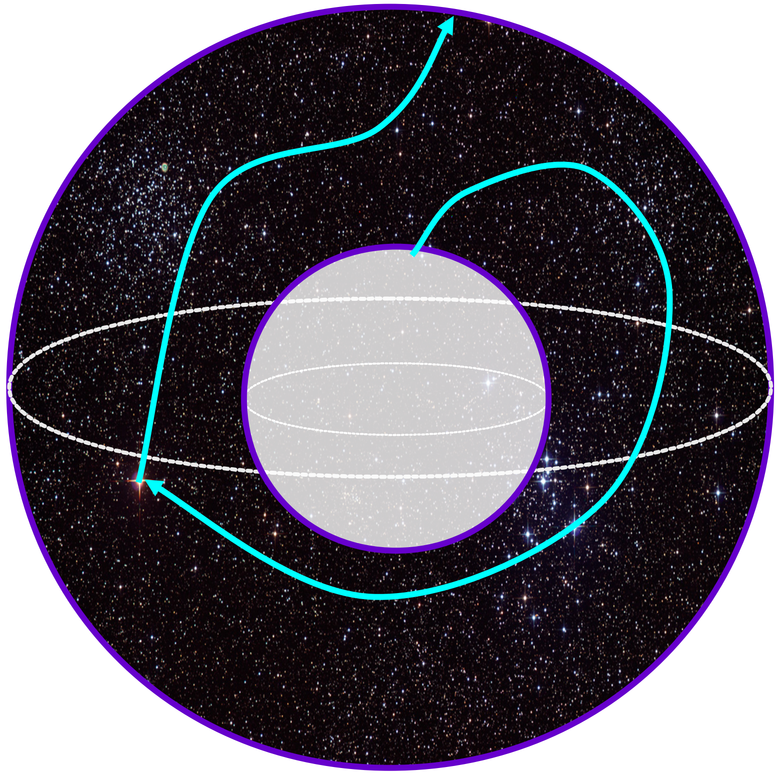
$$\pi_1(S^2 \times R) = 0$$



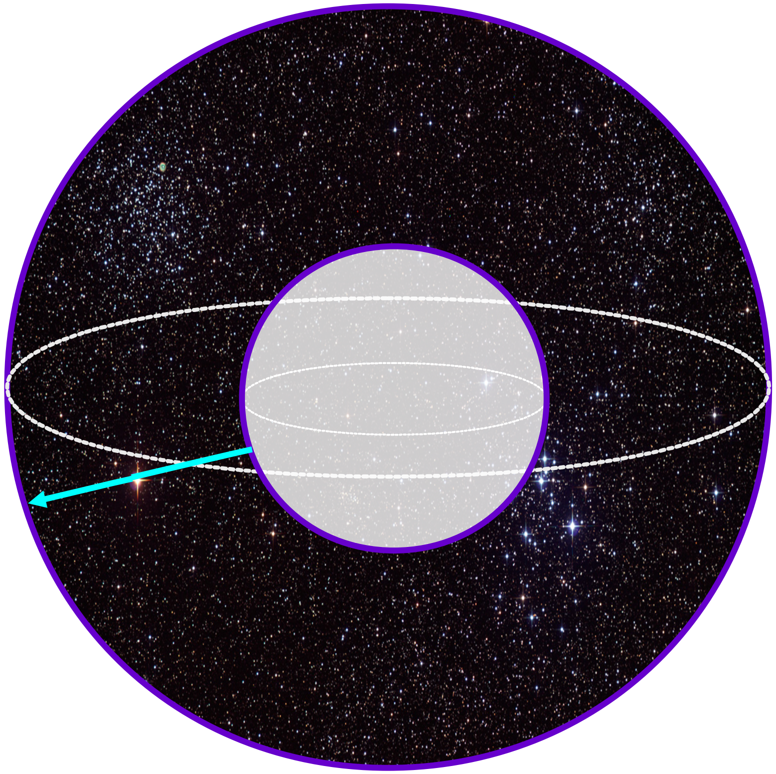
$\pi_1(S^2 \times S^1) = ?$



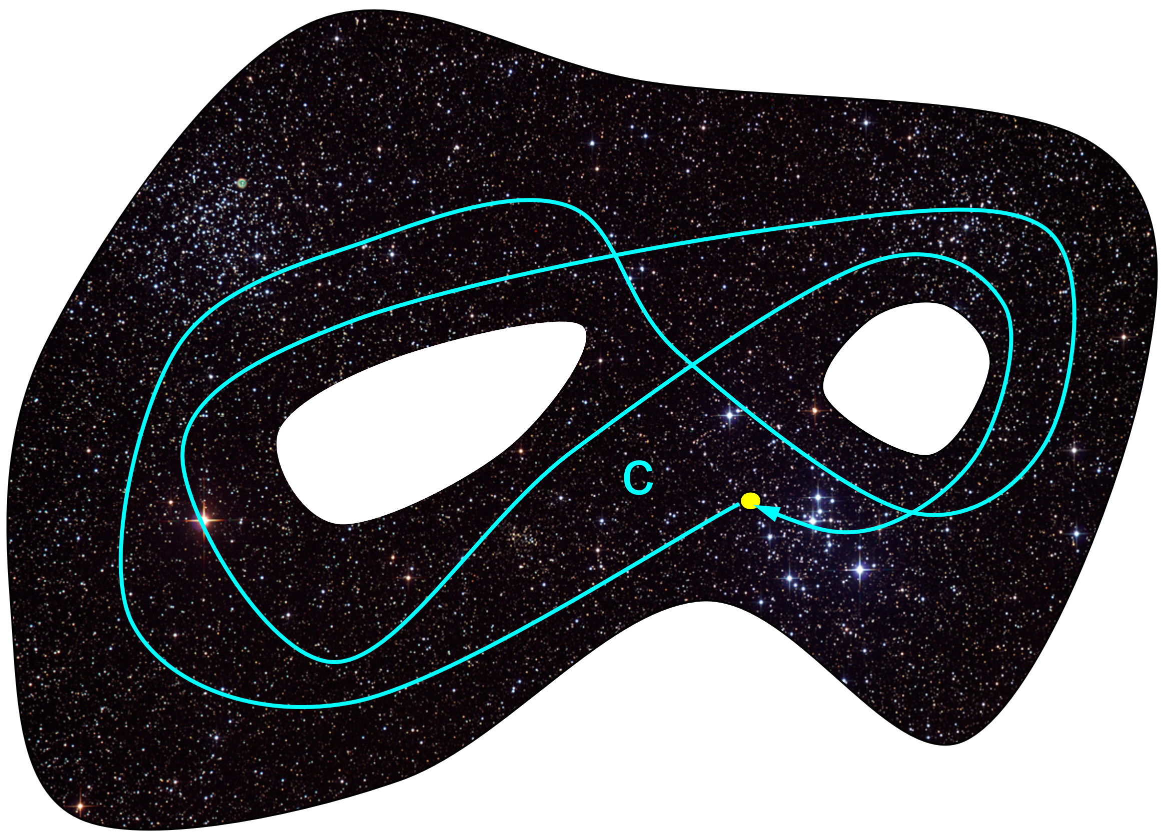
$$\pi_1(S^2 \times S^1) = ?$$



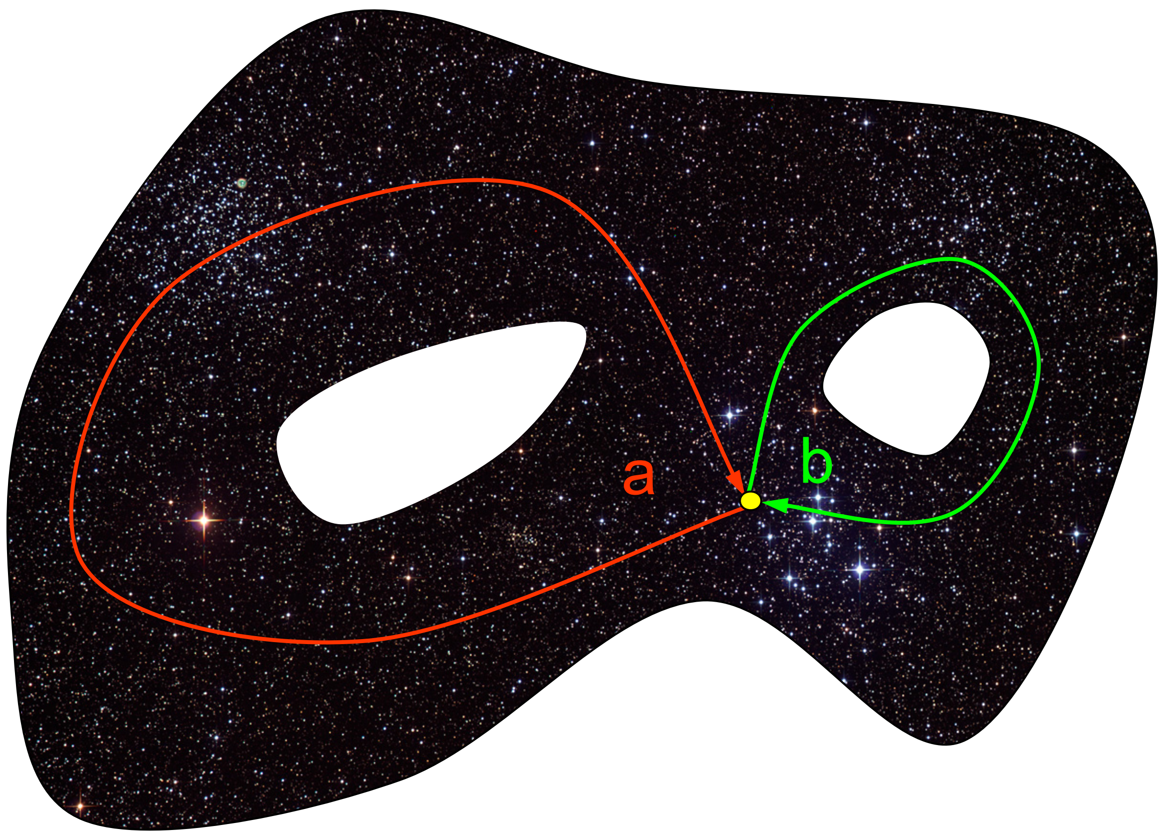
$$\pi_1(S^2 \times S^1) = Z$$



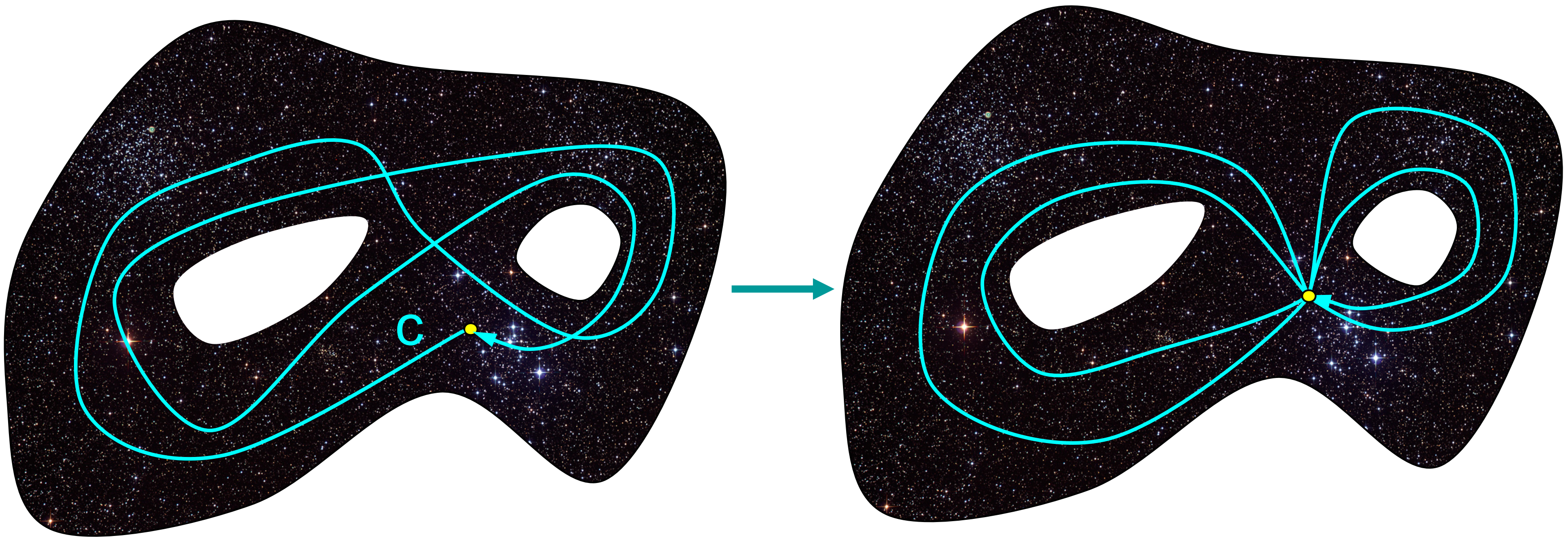
Cubo con 2 asas



Cubo con 2 asas



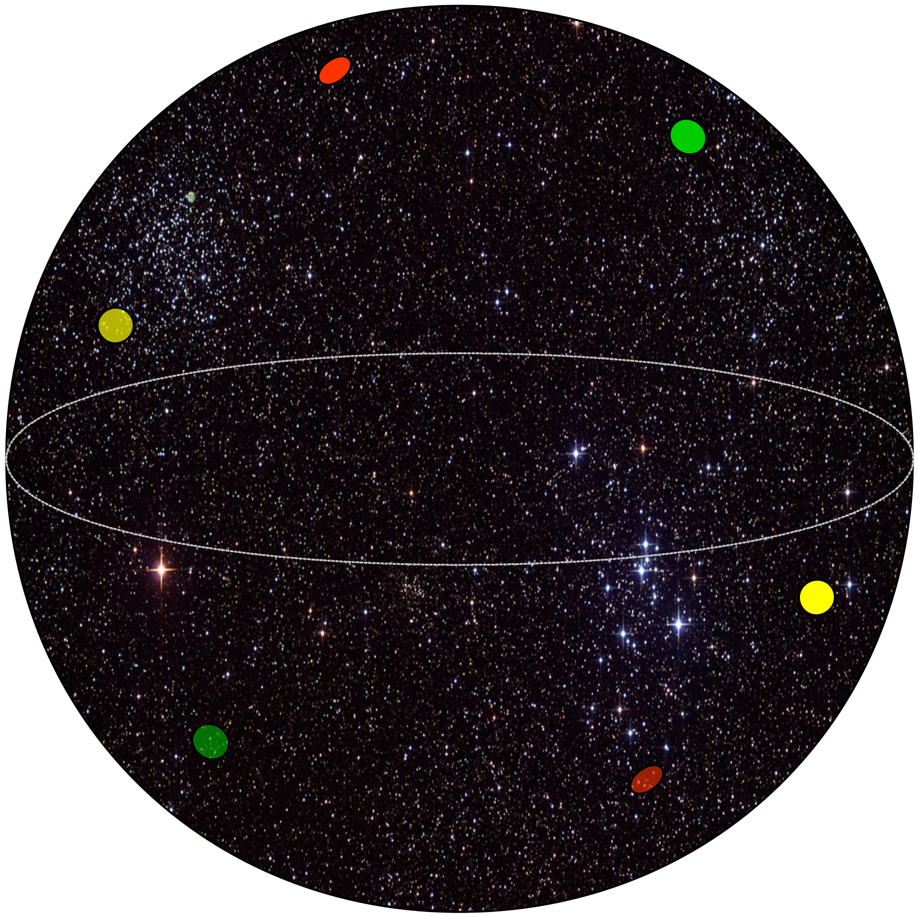
Cada lazo en el cubo con dos asas es homotópico a un producto de lazos que van alrededor de una de las asas.



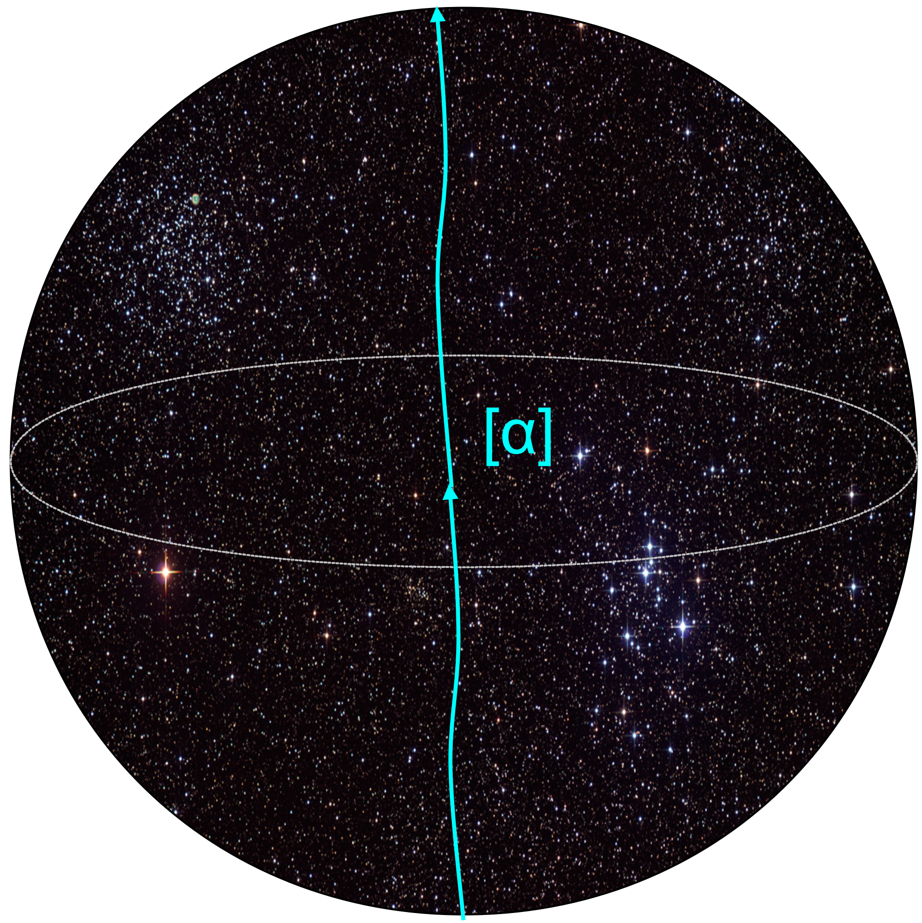
$c = a\, b^{-1}\, a^{-1}\, b$

El grupo fundamental del cubo con 2 asas
es el grupo de palabras escritas con a y b
(un *grupo libre* con 2 generadores)

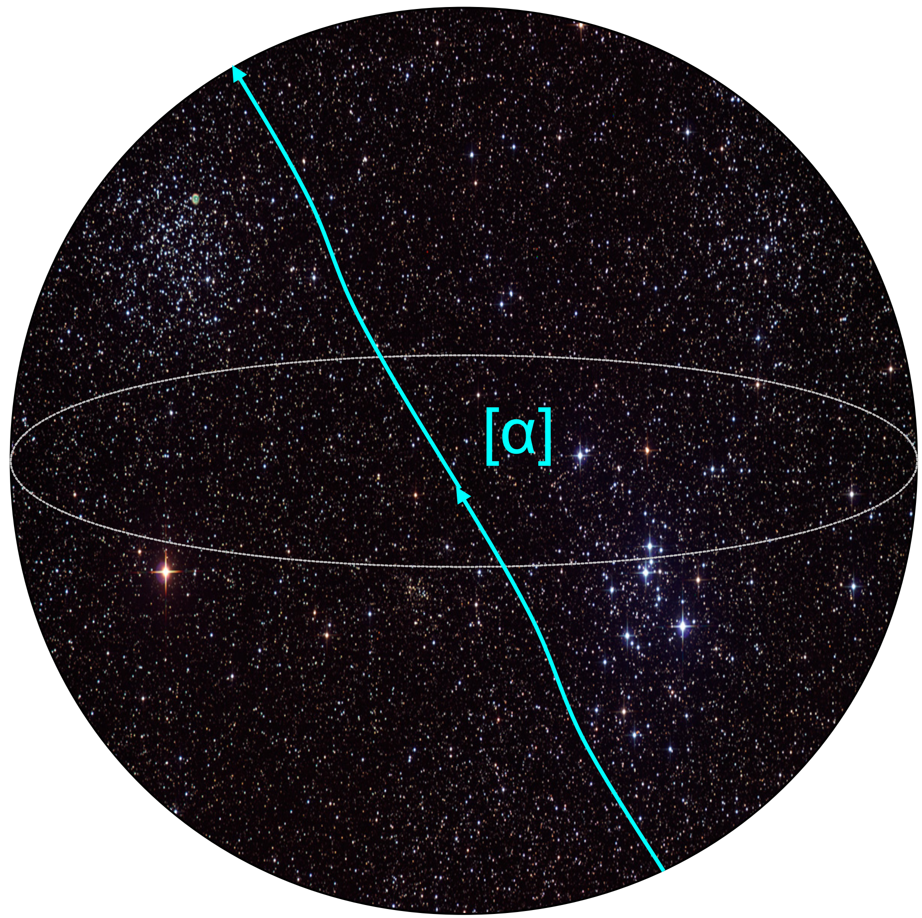
$\pi_1(RP^3) = ?$



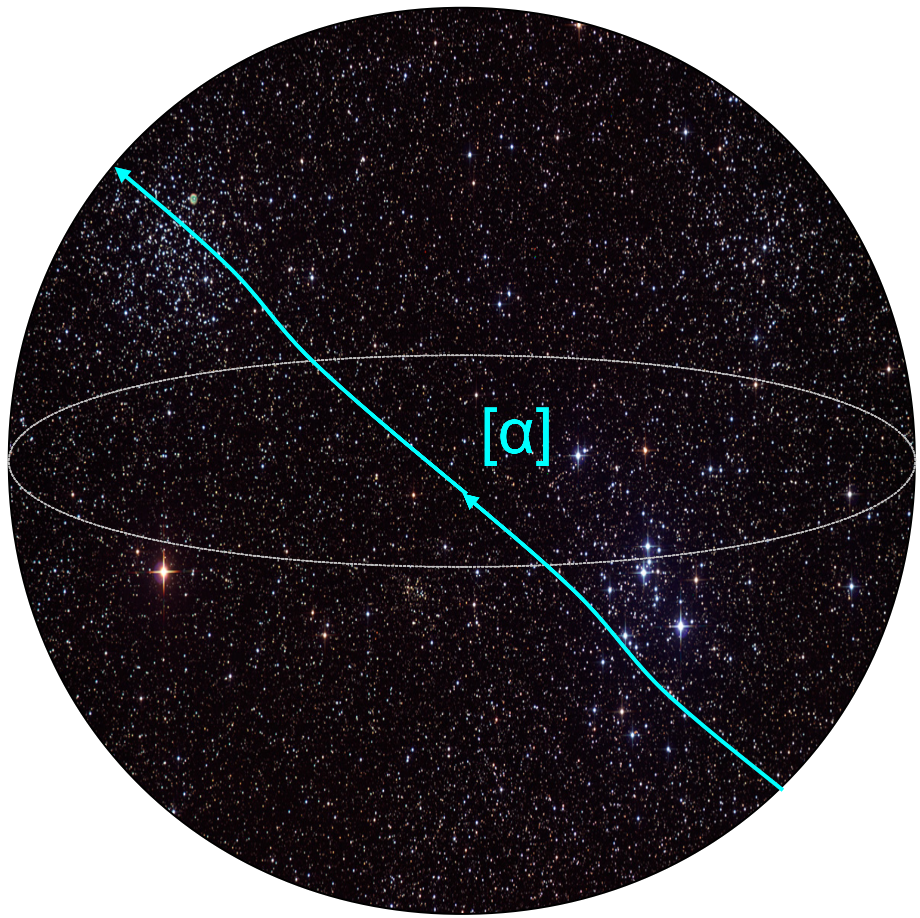
$$\pi_1(RP^3) = ?$$



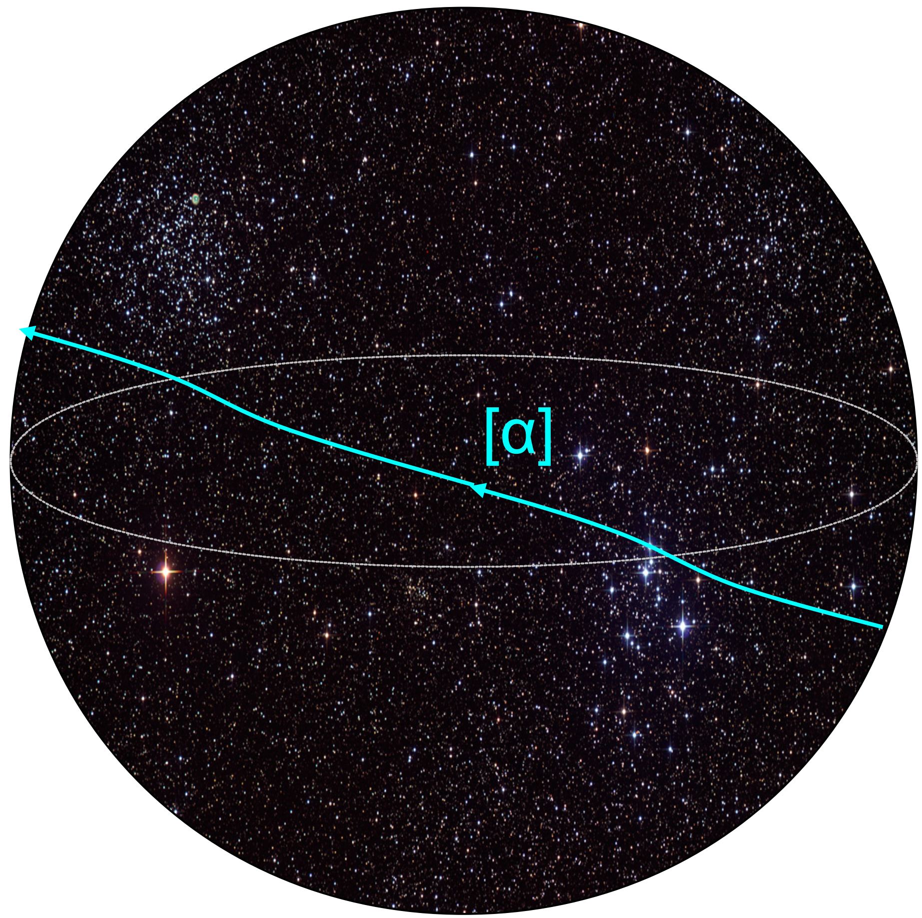
$\pi_1(RP^3) = ?$



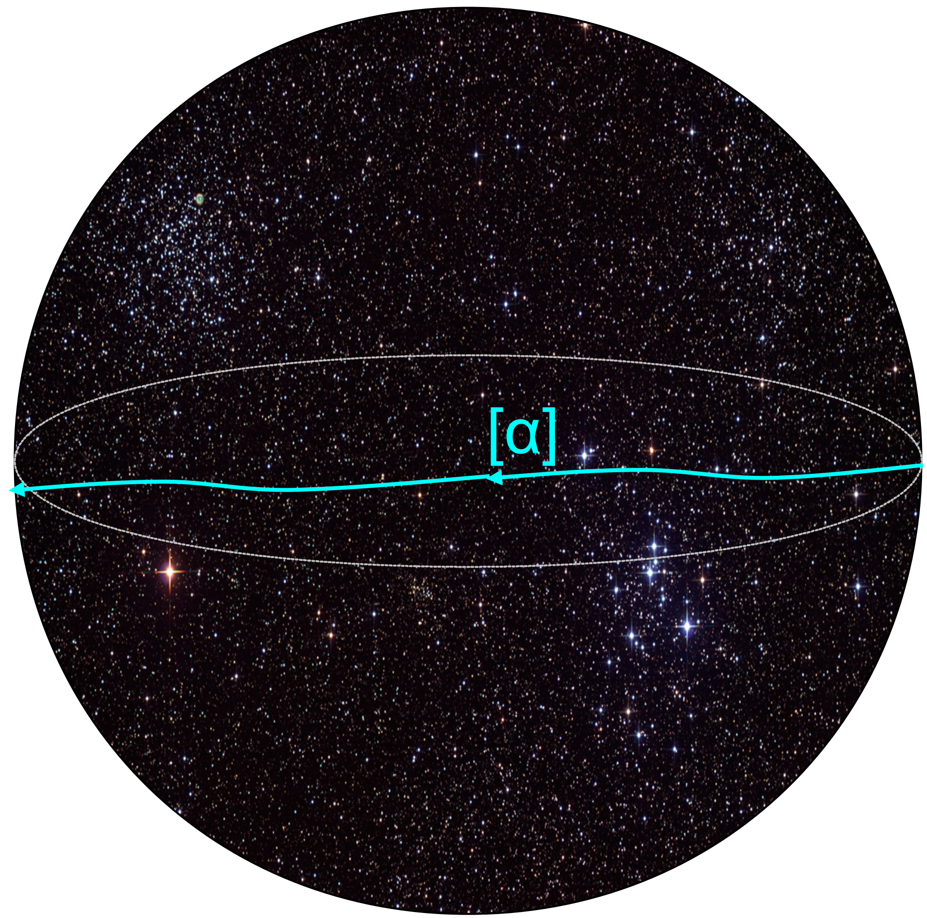
$\pi_1(RP^3) = ?$



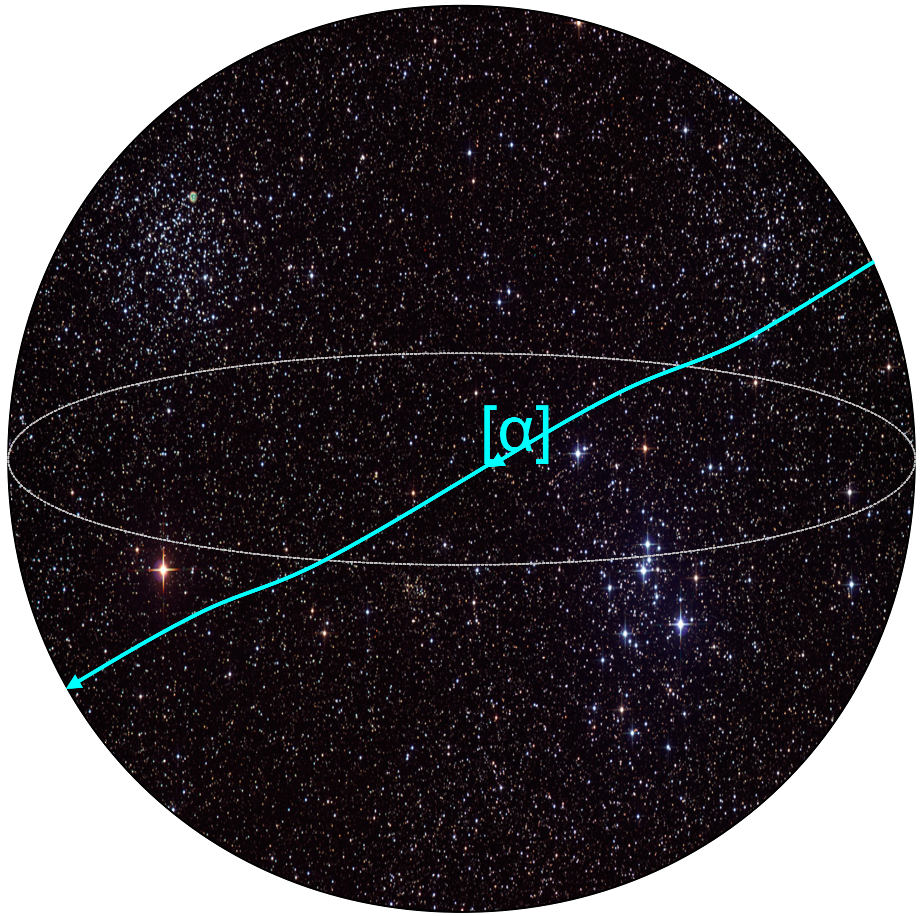
$\pi_1(RP^3) = ?$



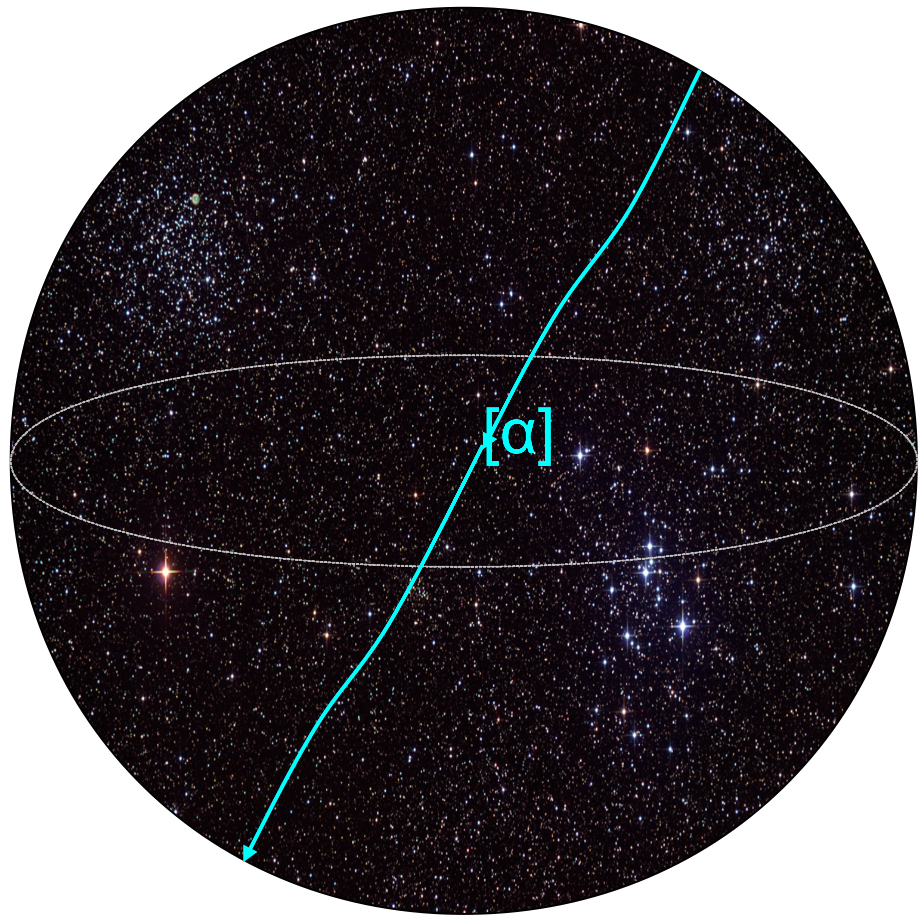
$$\pi_1(RP^3) = ?$$



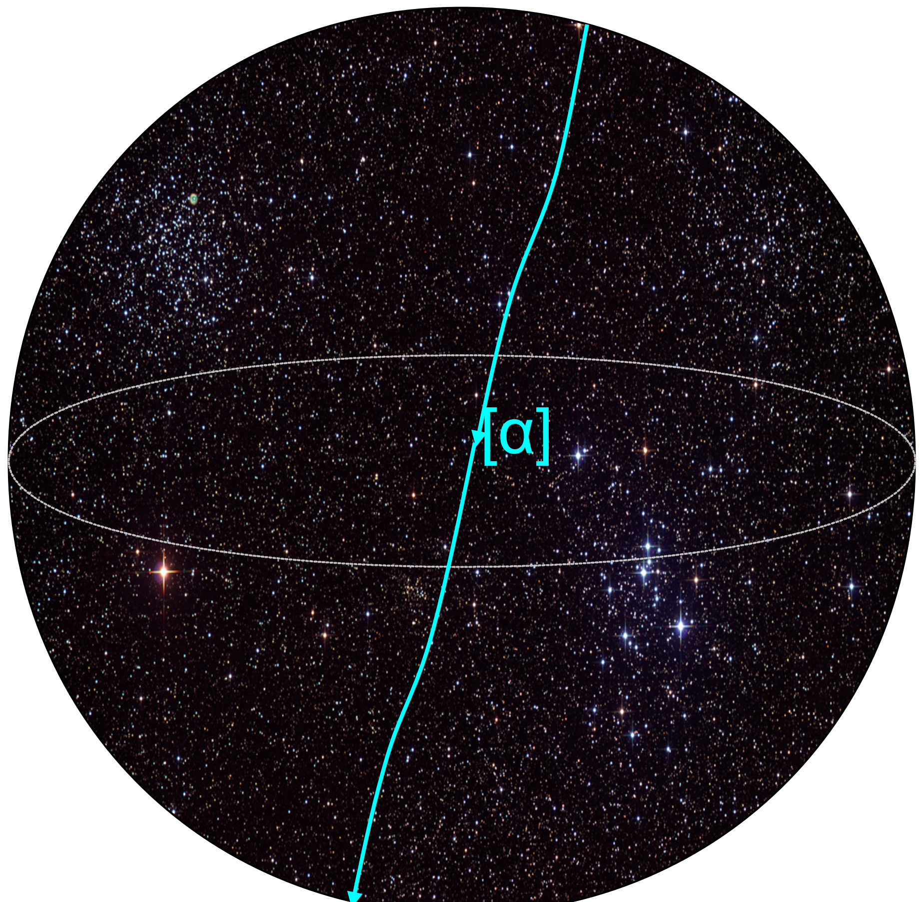
$\pi_1(RP^3) = ?$



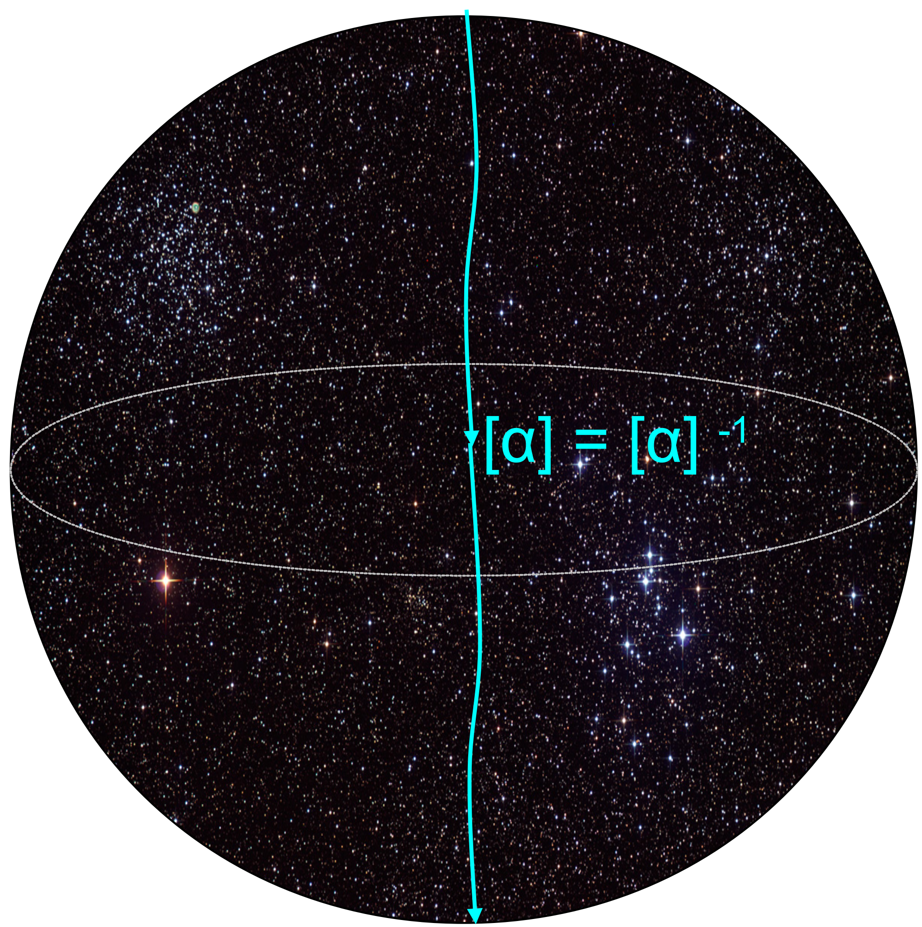
$\pi_1(RP^3) = ?$



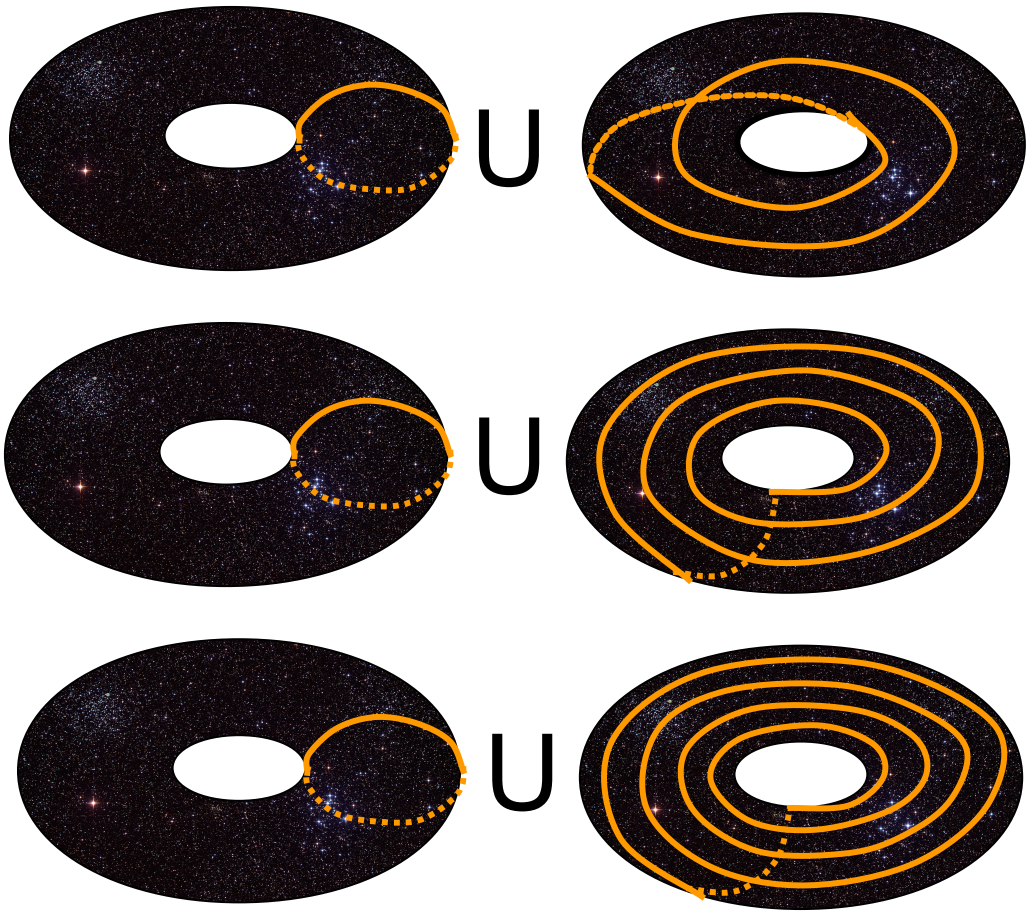
$\pi_1(RP^3) = ?$



$\pi_1(RP^3) = Z_2$



Otras variedades con grupo fundamental finito



Z_2

Z_3

Z_4

¿Qué tanta información sobre la variedad guarda el grupo fundamental?

¿Qué tanta información sobre la variedad guarda el grupo fundamental?

Si M es la suma de dos variedades M_1 y M_2 entonces $\pi_1(M)$ es isomorfo al producto libre de $\pi_1(M_1)$ y $\pi_1(M_2)$

Teorema Si $\pi_1(M)$ es isomorfo al producto libre de dos grupos A y B, entonces M es la suma de dos variedades M_1 y M_2 con grupos isomorfos a A y a B.

¿Qué tanta información sobre la variedad guarda el grupo fundamental?

Hay 3-variedades distintas con el mismo grupo fundamental:

- R^3 y S^3
- RP^3 y el espacio lente $L(2,1)$
- La suma de variedades $M+N$ y $M+N^-$ pueden ser distintas pero sus grupos son isomorfos.

Conjetura de Poincaré:

Si una 3-variedad cerrada M tiene grupo fundamental trivial entonces M es topológicamente igual a S^3.

La conjetura análoga para variedades abiertas es falsa: *Hay variedades abiertas con grupo fundamental trivial distintas de* R^3*.*

Conjetura

Las 3-variedades cerradas e irreducibles con grupo fundamental infinito están determinadas por su grupo fundamental:

Si dos 3-variedades cerradas irreducibles tienen grupos fundamentales infinitos e isomorfos, entonces son topologicamente iguales.